Mục lục

Chương 4

Chuỗi số và chuỗi hàm

4.1 Chuỗi số

Chuỗi vô hạn là các tổng chứa vô hạn số các số hạng. Khái niệm chuỗi số được bắt nguồn từ ý tưởng của Newton biểu diễn các hàm số ở dạng các chuỗi vô hạn. Trong chương này ta sẽ đưa ra định nghĩa chính xác về các tổng vô hạn, đồng thời giới thiệu các ứng dụng quan trọng của chuỗi vô hạn trong vật lý toán, hóa học, ở đó các hàm số được định nghĩa thông qua các tổng của các chuỗi. Ta sẽ nghiên cứu các khái niệm cơ bản và quan trọng về sự hội tụ của các chuỗi vô hạn và các dấu hiệu về tính hội tụ.

4.1.1 Các khái niệm cơ bản về chuỗi số

Giả sử $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy số. Ta thử lấy tổng tất cá các số hạng của dãy này, khi đó ta dẫn tới một biểu thức có dạng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Vậy tổng vô hạn các số hạng như trên có thể định nghĩa một các hợp lý như thế nào?

Định nghĩa 1. Cho $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một dãy vô hạn gồm các số thực. Khi đó ký hiệu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

được gọi là một *chuỗi vô hạn*, và a_n gọi là *số hạng thứ n* của chuỗi đó. Ta nói $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ* về tổng S và viết rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S,$$

nếu dãy số $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ được định nghĩa bởi

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ n \geq k,$$

hội tụ về S. Mỗi một tổng hữu hạn S_n được gọi là *tổng riêng thứ n* của $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nếu dãy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ phân kỳ thì ta nói $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ*. Trong trường hợp $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc $-\infty$ thì ta nói $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *phân kỳ về* ∞ *hoặc* $-\infty$, và viết là

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \text{ (tương ứng } = -\infty).$$

Thông thường ta sẽ gọi ngắn gọn các chuỗi vô hạn là các *chuỗi số*. Ta cũng định nghĩa các chuỗi $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ một cách hoàn toàn tương tự với số hạng đầu tiên là a_k, $k \in \mathbb{N}$. Để rút gọn ký hiệu, đôi khi ta sử dụng cách viết $\sum a_n$ đối với chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ví dụ

Chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

hội tụ nếu $|r| < 1$ và tổng của nó là

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}, \ |r| < 1.$$

Nếu $|r| \geq 1$ thì chuỗi này là phân kỳ.

Đối với các chuỗi số ta có thể áp dụng các kết quả về các phép toán thực hiện trên dãy số thực. Ta có khẳng định sau đây.

Định lí 1. Giả sử các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ với các tổng

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b,$$

ở đó a, b là các số hữu hạn. Khi đó các chuỗi sau đây cũng hội tụ và bằng các tổng tương ứng ở vế phải

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = ca$, với $c = \text{const}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = a + b$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - b_n = a - b$.

Ta có thể sử dụng Định lý 1 để tính tổng một số chuỗi sơ cấp.

Ví dụ Tìm tổng của chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{2}{n(n+2)}\right)$

Lời giải: Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ là chuỗi hình học với $r=1/3$ do đó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1/3}{1-1/3}=\frac{1}{2}$.

Đối với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$ ta áp dụng công thức $\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. Do đó dễ dàng suy ra $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=1$.

Vậy tổng của chuỗi đã cho bằng $2\cdot 1/2+1=2$.

4.1.2 Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi

Tiêu chuẩn Cauchy đối với sự tồn tại giới hạn của dãy số dẫn tới một tiêu chuẩn hữu hiệu đối với sự hội tụ của chuỗi số.

Định lí 2. (Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số) Một chuỗi $\sum a_n$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon>0$ tồn tại số tự nhiên N sao cho

$$\left|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m\right|<\epsilon,\ \text{if } m\geq n\geq N \tag{4.1.1}$$

Ví dụ Chuỗi sau đây được gọi là *chuỗi điều hòa*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

Ta có thể chỉ ra dãy tổng riêng $\{S_n\}$ thỏa mãn tính chất $S_{2n}-S_n>1/2$ với mọi n, do đó nó không là dãy Cauchy. Vì vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ về $+\infty$. Làm thế nào có thể nhận biết được một chuỗi đã cho là hội tụ hay phân kỳ? Không khó khăn để có thể kiểm tra được ngay điều kiện cần sau đây về tính hội tụ của một chuỗi bất kỳ, và đó là hệ quả trực tiếp của tiêu chuẩn Cauchy được phát biểu ở trên.

Mệnh đề 3. Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ là hội tụ thì $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Chú ý rằng điều kiện trên đây chỉ là điều kiện cần mà chưa phải đủ đối với tính hội tụ của chuỗi. Ta có thể thấy ngay chuỗi điều hòa có số hạng tổng quát $a_n=1/n\to 0$ khi $n\to\infty$ tuy nhiên chuỗi đó là phân kỳ. Ta có thể sử dụng Mệnh đề 3 như một tiêu chuẩn kiểm tra về tính phân kỳ của chuỗi số.

Ví dụ Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3+n}{3n^3+n^2}$ phân kỳ.

Lời giải: Ta có thể thấy ngay với $a_n = \frac{2n^3+n}{3n^3+n^2}$, giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n = 2/3 \neq 0$. Do đó chuỗi đã cho là phân kỳ.

4.1.3 Các chuỗi không âm

Các tiêu chuẩn so sánh

Ý tưởng chính trong các tiêu chuẩn so sánh sau đây là ta đi so sánh một chuỗi đã cho với một chuỗi có tính hội tụ hay phân kỳ đã được biết trước. Các tiêu chuẩn sau được áp dụng chỉ đối với các chuỗi mà các số hạng của chúng đều không âm (*chuỗi số không âm*). Khẳng định thứ nhất nói lên rằng nếu một chuỗi mà các số hạng của nó *nhỏ hơn* một chuỗi *hội tụ* đã biết thì chuỗi ban đầu của chúng ta cũng hội tụ. Khẳng định thứ hai nói rằng nếu một chuỗi mà các số hạng của nó *lớn hơn* một chuỗi *phân kỳ* đã biết thì chuỗi ban đầu của chúng ta cũng phân kỳ.

Định lí 4. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi với các số hạng không âm.

(i) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và $a_n \le b_n$ với mọi n thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ.

(ii) Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ và $a_n \ge b_n$ với mọi n thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cũng phân kỳ.

Thông thường trong thực hành ta hay sử dụng các chuỗi sau đây trong tiêu chuẩn so sánh:

- Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ nêú $p > 1$ và phân kỳ nếu $p \le 1$.

- Chuỗi hình học $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ hội tụ nếu $|r| < 1$ và phân kỳ nếu $|r| \ge 1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3-n+1}$.

Lời giải: Dễ thấy với mọi $n \ge 1$ ta có $n^3 - n + 1 > \frac{n^3}{2}$, do đó $0 < \frac{2}{n^3-n+1} < \frac{4}{n^3}$, $\forall n \ge 1$. Do chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ (với $p = 3$) Tiêu chuẩn so sánh suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3-n+1}$ cũng hội tụ.

Chú ý cần kiểm tra trong ví dụ này tính không âm của chuỗi cần so sánh.

Trong một số trường hợp ta không thể áp dụng được tiêu chuẩn so sánh, tuy nhiên có thể quan sát thấy các số hạng của chuỗi đã cho có thể xấp xỉ theo một nghĩa nào đó với một chuỗi hội tụ hoặc phân kỳ đã biết. Trong trường hợp này ta có một tiêu chuẩn sau đây.

Định lí 5. (Tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn) Giả sử $a_n \geq 0$ và $b_n > 0$ với mọi $n \geq k \geq 1$. Khi đóƠ

(a) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$.

(b) Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ và $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n > 0$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n\pi/6}{(n+1)^p(n-1)^q}.$$

Lời giải: Đặt $a_n = \frac{2+\sin n\pi/6}{(n+1)^p(n-1)^q}$ và $b_n = \frac{1}{n^{p+q}}$. Ta có chuỗi $\sum b_n$ hội tụ khi và chỉ khi $p+q > 1$.

Xét
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2+\sin n\pi/6}{(1+1/n)^p(1-1/n)^q}.$$
Do đó $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$ và $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Áp dụng tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn ta suy ra chuỗi $\sum a_n$ hội tụ khi và chỉ khi $p+q > 1$.

Ta có khẳng định sau là hệ quả trực tiếp của Định lý 5.

Hệ quả 6. Giả thiết rằng $a_n \geq 0$ và $b_n > 0$ với mọi $n \geq k$, hơn nữa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

ở đó $0 < L < \infty$. Khi đó các chuỗi $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.

Ví dụ ta có thể sử dụng Hệ quả trên khi xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n)^q}$. Thật vậy do

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)^q}{n^{2q}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^q} = 1,$$

suy ra các chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+n)^q}$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}}$. Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $q > 1/2$.

Các tiêu chuẩn hội tụ dạng tỷ số và dạng căn thức

Đôi khi ra có thể xét một chuỗi có các số hạng dương hội tụ hay không bằng cách so tỷ số của các số hạng liên tiếp của nó với các tỷ số tương ứng của một chuỗi với tính hội tụ hay phân kỳ được biết trước.

Định lí 7. Giả sử $a_n > 0, b_n > 0$ với mọi n và

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Khi đó

(a) Chuỗi $\sum a_n < \infty$ nếu $\sum b_n < \infty$.

(b) $\sum b_n = \infty$ nếu $\sum a_n = \infty$.

Định lý trên có thể chứng minh bằng cách viết lại bất đẳng thức ở dạng

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}.$$

Điều này dẫn đến chuỗi tỷ số $\{a_n/b_n\}$ là không tăng. Các tiêu chuẩn so sánh và so sánh dạng giới hạn (Xem Định lý 5 và Định lý 4) dẫn tới khẳng định của định lý.

Một ứng dụng quan trọng của Định lý trên đó là các tiêu chuẩn tỷ số và tiêu chuẩn Raabe về tính hội tụ

Định lí 8. (Tiêu chuẩn tỷ số) Giả thiết rằng $a_n > 0$ với $n \geq k$. Khi đó

(a) Chuỗi $\sum a_n < \infty$ nếu $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$..

(b) $\sum a_n = \infty$ nếu $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Nếu

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \le \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

thì tiêu chuẩn tỷ số không đưa được ra kết luận, có nghĩa là chuỗi $\sum a_n$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Tiêu chuẩn tỷ số có thể được chứng minh bằng cách áp dụng Định lý 7. Nếu $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ thì tồn tại $r \in (0,1)$ sao cho $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r = \frac{r^{n+1}}{r^n}$. Khi đó ta sẽ so sánh chuỗi $\sum a_n$ và chuỗi $\sum r_n < \infty$. Trường hợp $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ được xét hoàn toàn tương tự.

Ví dụ Xét sự hội tụ của $\sum a_n$ với $a_n = \left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) r^n, r > 0$.

Lời giải: Ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \frac{2 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2}}{2 + \sin \frac{n\pi}{2}}$$

nhận các giá trị là $3r/2, 2r/3, r/2$ và $2r$, mỗi giá trị vô hạn lần. Do đó

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2r, \text{ và } \varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{r}{2}.$$

Suy ra chuỗi $\sum a_n$ hội tụ nếu $0 < r < 1/2$ và phân kỳ nếu $r > 2$. Tiêu chuẩn tỷ số không cho kết luận trong trường hợp $r \in [1/2, 2]$.

Trong thực hành ta hay sử dụng tiêu chuẩn tỷ số ở dạng đơn giản sau đây

Hệ quả 9. Giả thiết rằng $a_n > 0$ với $n \ge k$ và

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Khi đó

(a) Chuỗi $\sum a_n < \infty$ nếu $L < 1$..

(b) $\sum a_n = \infty$ nếu $L > 1$. Tiêu chuẩn không đưa được ra kết luận trong trường hợp $L = 1$.

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum nr^{n-1}, r > 0$.

Lời giải: Bằng cách sử dụng Hệ quả 9 suy ra ngay chuỗi hội tụ nếu $r < 1$ và phân kỳ trong trường hợp $r > 1$.

Với $r = 1$ ta không thể áp dụng được tiêu chuẩn tỷ số (do nó không đưa được ra kết luận). Tuy nhiên có thể quan sát khi đó số hạng tổng quát của chuỗi $a_n = n$ không hội tụ về 0 do đó $\sum nr^{n-1}$ phân kỳ với $r = 1$.

Định lí 10. (Tiêu chuẩn Raabe) Giả thiết rằng $a_n > 0$ với $n \geq k$. Đặt

$$M := \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big) \text{ và } m := \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n\Big(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\Big).$$

Khi đó

(a) Chuỗi $\sum a_n < \infty$ nếu $M < -1$..

(b) $\sum a_n = \infty$ nếu $m > -1$.

Nếu

$$m \leq -1 \leq M$$

thì tiêu chuẩn Raabe không đưa được ra kết luận, có nghĩa là chuỗi $\sum a_n$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Ý tưởng chứng minh: (a) Ta áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ở dạng sau đây

$$(1+x)^{-p} > 1 - px, x > 0, p > 0.$$

Giả sử $M < -p < -1$, khi đó với n đủ lớn ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{p}{n} < \frac{1}{(1+1/n)^p}.$$

Ta áp dụng Định lý 7 nếu so sánh chuỗi $\sum a_n$ và chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$.

Trường hợp (b) cũng được chứng minh bằng cách áp dụng bất đẳng thức Bernoulli ở dạng quen thuộc

$$(1-x)^q < 1 - qx,\ 0 < x < 1,\ 0 < q < 1,$$

và sử dụng khẳng định của Định lý 7.

Định lý sau đây cũng là một tiêu chuẩn quan trọng đối với các chuỗi không âm và có sự liên hệ chặt chẽ với các chuỗi lũy thừa sẽ được giới thiệu ở phần chuỗi hàm.

Định lí 11. (Tiêu chuẩn căn thức Cauchy) Giả thiết rằng $a_n > 0$ với $n \geq k$. Khi đó

(a) Chuỗi $\sum a_n < \infty$ nếu $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{1/n} < 1$..

(b) $\sum a_n = \infty$ nếu $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{1/n} > 1$.

Nếu $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n^{1/n} = 1$ thì tiêu chuẩn căn thức Cauchy không đưa được ra kết luận, có nghĩa là chuỗi $\sum a_n$ có thể hội tụ hoặc phân kỳ

Ví dụ Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum \frac{1}{n^p}$.

Với $a_n = \frac{1}{n^p}$ ta có

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \big(\frac{1}{n^p}\big)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \exp(-\frac{p}{n}\log n) = 1$$

với mọi p. Do đó tiêu chuẩn căn thức Cauchy không đưa được kết luận. Ta cần sử dụng tiêu chuẩn tích phân sẽ được giới thiệu tiếp theo đây để xét tính hội tụ của chuỗi đã cho.

Tiêu chuẩn hội tụ tích phân

Định lí 12. (Tiêu chuẩn tích phân) Giả sử

$$a_n = f(n),\ n \geq k,$$

ở đó f là một hàm nhận giá trị dương, không tăng và khả tích địa phương trên $[k, \infty)$. Khi đó chuỗi

$$\sum a_n < \infty$$

khi và chỉ khi

$$\int_k^\infty f(x)dx < \infty.$$

Chứng minh. Tiêu chuẩn tích phân được chứng minh bằng cách sử dụng cặp bất đẳng thức sau đây

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n,\ n \geq k,$$

và quan sát rằng $\int_k^\infty f(x)dx < \infty$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\sum_{n=k}^\infty \int_n^{n+1} f(x)dx < \infty.$$

Từ tiêu chuẩn so sánh (Định lý 4) suy ra điều phải chứng minh $\square$

Ví dụ Tiêu chuẩn tích phân cho phép ta khẳng định được rằng các chuỗi

$$\sum \frac{1}{n^p}, \ \sum \frac{1}{n(\log n)^p}, \text{ và } \sum \frac{1}{n \log n[\log(\log n)]^p}$$

hội tụ khi $p > 1$ và phân kỳ khi $0 < p \leq 1$ bằng cách xét các tích phân

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}, \ \int_a^\infty \frac{dx}{x(\log x)^p}, \text{ và } \int_a^\infty \frac{dx}{x \log x[\log(\log x)]^p}$$

với a đủ lớn.

Cả ba chuỗi trên đều phân kỳ với $p \geq 0$ bằng cách áp dụng tiêu chuẩn so sánh một cách thích hợp.

4.1.4 Tính hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện

Bây giờ ta sẽ bỏ điều kiện áp đặt là các số hạng của chuỗi không âm với n đủ lớn. Khi đó chuỗi $\sum a_n$ có thể hội tụ theo hai cách hoàn toàn khác nhau. Ta đưa ra các định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2. Chuỗi $\sum a_n$ được gọi là hội tụ một cách tuyệt đối (hay bói ngắn gọn là hội tụ tuyệt đối), nếu chuỗi $\sum |a_n| < \infty$.

Nhận xét: Mọi chuỗi hội tụ có các số hạng có cùng dấu bắt đầu từ một chỉ số n luôn hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ Xét chuỗi

$$\sum \frac{\sin n\varphi}{n^p},$$

với φ bất kỳ và $p > 1$. Do

$$\left|\frac{\sin n\varphi}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p},$$

và chuỗi $\sum \frac{1}{n^p} < \infty$ với $p > 1$, suy ra chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối với $p > 1$.

Định lý sau đây hoàn toàn được chứng minh một cách dễ dàng bằng cách sử dụng tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi.

Định lí 13. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ tuyệt đối thì nó hội tụ.

Định nghĩa 3. Nếu chuỗi $\sum a_n$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối thì ta nói chuỗi *hội tụ có điều kiện*.

Ví dụ Chuỗi

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$$

hội tụ có điều kiện khi $0 < p \leq 1$. Ta sẽ chứng minh sự hội tụ của chuỗi này khi đề cập tới các chuỗi đan dấu ở phần sau.

4.1.5 Các tiêu chuẩn Dirichlet và Abel

Hầu hết các tiêu chuẩn hội tụ được xét ở trên đều chỉ áp dụng được với các chuỗi với các số hạng có cùng dấu khi n đủ lớn. Định lý sau đây không yêu cầu điều kiện đó. Khẳng định dưới đây tương tự như tiêu chuẩn Dirichlet về sự hội tụ của tích phân suy rộng.

Định lí 14. Chuỗi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty, \tag{4.1.2}$$

và

$$\Big|\sum_{i=k}^{n} b_i\Big| < M,\ n \geq k \tag{4.1.3}$$

với một hằng số M.

Chú ý: Thông thường điều kiện (4.1.2) được thay bởi điều kiện dãy $\{a_n\}$ là đơn điệu, hội tụ về 0. Hiển nhiên khi đó (4.1.2) sẽ được thỏa mãn. Do đó ta có khẳng định sau.

Định lí 15. (Tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet) Chuỗi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu $a_{n+1} \leq a_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$, và

$$\Big|\sum_{i=k}^{n} b_i\Big| < M,\ n \geq k, \tag{4.1.4}$$

với một hằng số M.

Tiêu chuẩn sau đây được mang tên nhà toán học Abel.

Định lí 16. (Tiêu chuẩn hội tụ Abel) Chuỗi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ nếu

(a) Chuỗi $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(b) Các số b_n, $(n \geq k)$ tạo thành một dãy đơn điệu và bị chặn

Ví dụ Chuỗi

$$\sum \frac{\sin n\varphi}{n^p}$$

như ta đã biết ở trên, hội tụ với $p > 1$. Tuy nhiên nó cũng hội tụ với $0 < p \leq 1$ theo tiêu chuẩn Dirichlet, với $a_n = 1/n^p$ và $b_n = \sin n\varphi$

Từ tiêu chuẩn hội tụ Dirichlet dễ dàng suy ra tiêu chuẩn hội tụ sau đây của một chuỗi đan dấu.

Định lí 17. (Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu) Chuỗi $\sum(-1)^n a_n$ hội tụ nếu $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4.1.6 Một số tính chất khác của các chuỗi hội tụ tuyệt đối

Sắp xếp lại các số hạng của một chuỗi

Các tổng hữu hạn không thay đổi nếu ta xếp lại các số hạng của nó, ví dụ

$$1 + 4 + 5 = 1 + 5 + 4 = 5 + 4 + 1 = 5 + 1 + 4 = 4 + 5 + 1 = 4 + 1 + 5.$$

Tuy nhiên đối với các chuỗi (là các tổng vô hạn), điều này không còn đúng nữa. Ta nói $\sum b_n$ là một sắp xếp lại của $\sum a_n$ nếu hai chuỗi có cùng các số hạng như nhau, có thể được viết theo các thứ tự khác nhau. Do các tổng riêng của hai chuỗi có thể tạo nên các dãy số hoàn toàn khác nhau, ta không thể mong đợi được chúng có cùng các tính chất về hội tụ, và nói chung chúng không có chung các tính chất đó.

Ta sẽ thấy sau đây đối với một chuỗi hội tụ tuyệt đối, mọi sắp xếp lại của nó đều có chung một tổng, tuy nhiên các chuỗi hội tụ có điều kiện sẽ không thỏa mãn tính chất này.

Định lí 18. Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ là một sắp xếp lại của một chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ cũng hội tụ tuyệt đối và hội tụ tới cùng một tổng.

Định lý18 được chứng minh bằng cách sử dụng tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số.

Để nghiên cứu điều gì sẽ xảy ra khi sắp xếp lại các chuỗi hội tụ có điều kiện, ta cần một kết quả quan trọng sau.

Định lí 19. Nếu $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ và $\{a_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tương ứng là các dãy con của tất cả các số hạng dương và âm của một chuỗi $\sum a_n$ hội tụ có điều kiện, thì

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = \infty \text{ và } \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j} = -\infty$$

Từ định lý trên đây ta sẽ nhận được một kết quả khẳng định rằng một chuỗi hội tụ có điều kiện có thể sắp xếp lại thành một chuỗi hội tụ tới một số bất kỳ, phân kỳ về $\pm\infty$ và thậm chí là hoàn toàn phân kỳ.

Định lí 20. Giả sử $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi hội tụ có điều kiện và α, β là các số bất kỳ trên đường thẳng thực mở rộng $-\infty \le \alpha \le \beta \le \infty$. Khi đó các số hạng của $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có thể sắp xếp lại để tạo thành một chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ với các tổng riêng

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,\ n \ge 1,$$

sao cho

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n = \beta \text{ và } \underline{\lim_{n\to\infty}}\, B_n = \alpha.$$

Tích của các chuỗi số

Cauchy đã đưa ra định nghĩa sau về tích của hai chuỗi số.

Định nghĩa 4. Tích Cauchy của hai chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ là một chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, ở đó

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0.$$

Khi đó ta viết $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\Big)$.

Nhận xét rằng

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)$$

và tích Cauchy của hai chuỗi có thể định nghĩa được ngay cả khi một hoặc cả hai chuỗi ban đầu phân kỳ. Trong trường hợp cả hai chuỗi hội tụ, ta sẽ quan tâm đến mối liên hệ giữa tích của các tổng và tổng của tích Cauchy đối với các chuỗi số đó. Ta có một kết quả sau đây trả lời phần nào cho vấn đề này.

Định lí 21. Nếu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tụ tuyệt đối và hội tụ về các tổng A và B tương ứng thì tích Cauchy của chúng $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ hội tụ tuyệt đối và hội tụ về AB.

4.2 Chuỗi hàm

Định nghĩa chuỗi hàm. Giả sử $u_n(x)$ là các hàm số xác định trên tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Ta gọi

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{4.2.1}$$

là một chuỗi hàm, $S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Chuỗi hàm (4.2.1) được gọi là hội tụ (phân kỳ) tại điểm $x_0 \in X$ nếu dãy $\{S_n(x_0)\}$ hội tụ (phân kỳ) tại x_0. Tập các điểm hội tụ của chuỗi hàm đc gọi là miền hội tụ của nó. Giới hạn $S(x)$ của dãy tổng riêng được gọi là tổng của chuỗi hàm.

Thí dụ 1. Chuỗi hàm số $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$ hội tụ với mọi $x \in (-1,1)$ và có tổng $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

Thí dụ 2. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sinnx}{n^2+x^2}$ có miền hội tụ là $\mathbb{R}$.

Định nghĩa chuỗi hàm hội tụ đều. Chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ được gọi là hội tụ đều trên tập hợp $X_0 \subset X$ và có tổng là $S(x)$ nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon,\ \forall x \in X_0, \forall n \geqslant n_0.$$

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu các hàm số $u_n(x)$ thỏa mãn $|u_n(x)| \leqslant a_n, \forall x \in X_0$ và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên tập X_0.

Thí dụ. Chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^n x}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$.

Tính chất của tổng của chuỗi hàm

Định lí 22. Nếu các hàm số $u_n(x)$ liên tục trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên I và có tổng $S(x)$ thì $S(x)$ là hàm số liên tục trên I.

Định lí 23. Nếu các hàm số $u_n(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b] \subset \mathbb{R}$ và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên $[a,b]$ và có tổng $S(x)$ thì

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Định lí 24. Nếu các hàm số $u_n(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(a,b) \subset \mathbb{R}$, chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tới hàm $S(x)$ và chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}$ hội tụ đều trên (a,b) thì $S(x)$ là hàm số khả vi trên (a,b) và

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

4.3 Chuỗi lũy thừa

Trường hợp đặc biệt của chuỗi hàm là chuỗi lũy thừa, khi các số hạng của chuỗi có dạng

$$u_n(x) = a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

hoặc tổng quát hơn

$$u_n(x) = a_n (x - x_0)^n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Định lí 25. Đối với chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ có ba khả năng sau xảy ra:

1. Chuỗi chỉ hội tụ khi $x = x_0$.
2. Chuỗi hội tụ với mọi giá trị của x.
3. Tồn tại một số dương R sao cho chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(x_0 - R, x_0 + R)$ và phân kỳ trong các khoảng $(-\infty, x_0 - R,\ (x_0 + R, +\infty)$.

Số R trong trường hợp 3 được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi, để thuận tiện ta có thể coi bán kính hội tụ của chuỗi trong trường hợp 1 là 0, trong trường hợp 2 là $+\infty$. Nó được tìm theo công thức sau

Định lí 26. Nếu $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ được xác định bởi

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu} \rho = +\infty \\ +\infty & \text{nếu} \rho = 0. \end{cases}$$

Vậy để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa, trước tiên, chúng ta tìm bán kính hội tụ của nó, sau đó xét tính hội tụ của chuỗi tại hai đầu mút $x_0 - R, x_0 + R$.

Thí dụ 1. Chuỗi lũy thừa $x + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$ có bán kính hội tụ $R = 1$. Tại $x = 1$, chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ, tại $x = -1$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ hội tụ. Do đó, miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $[-1, 1)$.

Thí dụ 2. Chuỗi lũy thừa $1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ có bán kính hội tụ $R = \infty$ nên miền hội tụ của nó là toàn bộ $\mathbb{R}$.

Tính chất của chuỗi lũy thừa

Giả sử R là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $S(x)$ là tổng của chuỗi. Ta có các kết quả sau

1. Chuỗi lũy thừa hội tụ đều trên mọi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$.
2. S(x) là hàm liên tục trên khoảng $(-R, R)$.
3. Trên mỗi đoạn $[a, b] \subset (-R, R)$ ta có

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

4. $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa. Trong chương 2 ta đã tìm cách xấp xỉ một hàm số với một hàm đa thức nhờ các công thức Taylor và Mac Laurin. Bây giờ, ta sẽ đưa ra điều kiện để có thể khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa.

Định lí 27. Giả sử trong lân cận nào đó $(x_0 - h, x_0 + h)$ của điểm x_0, hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp và tồn tại số dương M sao cho

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M, \quad \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Khi đó hàm f có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong khoảng đó, tức là

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Trong trường hợp $x_0 = 0$, ta có khai triển Mac Laurin. Sau đây là khai triển Mac Laurin của một số hàm sơ cấp

1.$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}$

4.$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1)$

5. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$

4.4 Chuỗi Fourier

Một chuỗi hàm có vai trò quan trọng sau chuỗi lũy thừa là chuỗi lượng giác có dạng

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos x + b_n \sin x). \tag{1}$$

Ta có thể khai triển một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π thành chuỗi lượng giác nói trên nếu hàm f thỏa mãn một trong hai điều kiện sau trên đoạn $[-\pi, \pi]$:

a) f và f' liên tục từng khúc,

b) f đơn điệu từng khúc và bị chặn.

Khi đó chuỗi lượng giác (1) được gọi là chuỗi Fourier của f, trong đó các hệ số Fourier của nó cho bởi công thức sau

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

Hơn nữa chuỗi (1) hội tụ và có tổng $S(x)$, bằng $f(x)$ tại những điểm liên tục của f và bằng $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ tại những điểm gián đoạn của f.

Bài tập

1. Xác định các chuỗi sau là hội tụ hay phân kỳ

   (a) $\sum \frac{1+2^n}{3^n}$

   (b) $\sum \arctan n$

   (c) $\sum (\cos 1)^n$

2. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi sau.

   (a) $\sum \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^5+1}}$

   (b) $\sum \frac{1}{n^2[1 + \frac{1}{2}\sin(n\pi/4)]}$

   (c) $\sum \frac{1 - e^{-n} \log n}{n}$

(d) $\sum \cos \dfrac{\pi}{n^2}$

(e) $\sum \sin \dfrac{\pi}{n^2}$

(f) $\sum \dfrac{1}{n} \tan \dfrac{\pi}{n}$

(g) $\sum \dfrac{1}{n} \cot \dfrac{\pi}{n}$

(h) $\sum \dfrac{\log n}{n^2}$

3. Giả thiết tổng riêng thứ n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}.$$

Hãy tìm a_n và tổng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Sử dụng tiêu chuẩn tích phân Cauchy để tìm tất cả các giá trị p sao cho chuỗi hội tụ.

(a) $\sum \dfrac{n}{(n^2-1)^p}$

(b) $\sum \dfrac{n^2}{(n^3+4)^p}$

(c) $\sum \dfrac{\sinh n}{(\cosh n)^p}$

5. (a) Sử dụng đồ thị của hàm $y = 1/x$ hãy chỉ ra rằng nếu s_n là tổng riêng thứ n của chuỗi điều hòa thì

$$s_n \leq 1 + \ln n.$$

(b) Chuỗi điều hòa tuy phân kỳ tuy nhiên phân kỳ rất chậm tới vô cùng. Sử dụng câu (a) để chỉ ra rằng tổng của 1 triệu số hạng đầu tiên nhỏ hơn 15 và tổng của 1 tỷ số hạng đầu tiên nhỏ hơn 22.

6. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ.

(a) $\sum \dfrac{2+\sin n\varphi}{n^2+\sin n\varphi}$

(b) $\sum \dfrac{n+1}{n} r^n$

(c) $\sum e^{-n\alpha} \cosh n\alpha,\ \alpha > 0$

(d) $\sum \dfrac{n + \ln n}{n^2(\ln n)^2}$

(e) $\sum \dfrac{n + \ln n}{n^2 \ln n}$

(f) $\sum \dfrac{(1 + 1/n)^n}{2^n}$

7. Hãy chỉ ra rằng nếu $a_n > 0$ và chuỗi $\sum a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum \ln(1 + a_n)$ cũng hội tụ.

8. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi.

   (a) $\sum \dfrac{2 + \sin^2(n\pi/4)}{3^n}$

   (b) $\sum \dfrac{n(n+1)}{4^n}$

   (c) $\sum \dfrac{3 - \sin(\pi/2)}{n(n+1)}$

   (d) $\sum \dfrac{n + (-1)^n}{n(n+1)}$

9. Giả sử các số hạng $a_n > 0$ sao cho chuỗi $\sum a_n$ hội tụ. Liệu ta có thể suy ra được rằng chuỗi $\sum \sin(a_n)$ cũng hội tụ?

10. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi, với $r > 0$.

   (a) $\sum \dfrac{n!}{r^n}$

   (b) $\sum n^a r^n$

   (c) $\sum \dfrac{r^n}{n!}$

   (d) $\sum \dfrac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   (e) $\sum \dfrac{r^{2n}}{(2n)!}$

11. Chứng minh rằng nếu $a_n \geq 0$ và chuỗi $\sum a_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum a_n^2$ cũng hội tụ.

12. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ.

    (a) $\sum \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

    (b) $\sum \dfrac{(3n)!}{3^{3n}n!(n+1)!(n+3)!}$

    (c) $\sum \dfrac{2^n n!}{5 \cdot 7 \cdots (2n+3)}$

    (d) $\sum \dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)},\ (a, b > 0)$

13. Tìm tất cả các giá trị dương của c sao cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} c^{\ln n}$ hội tụ.

14. Xác định tính hội tụ hay phân kỳ.

    (a) $\sum \dfrac{n^n(2+(-1)^n)}{2^n}$

    (b) $\sum \left(\dfrac{1+\sin 3n\varphi}{3}\right)^n$

    (c) $\sum (n+1)\left(\dfrac{1+\sin(n\pi/6)}{3}\right)^n$

    (d) $\sum \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

15. Xác định chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hay phân kỳ.

    (a) $\sum \dfrac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

    (b) $\sum \dfrac{n^n}{3^{1+3n}}$

16. Tìm tất cả các số k nguyên dương sao cho chuỗi

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

    hội tụ.

17. Xác định chuỗi đã cho là hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hay phân kỳ.

(a) $\sum \dfrac{b_n}{\sqrt{n}}$ với $b_{4m} = b_{4m+1} = 1,\ b_{4m+2} = b_{4m+3} = -1$.

(b) $\sum \dfrac{1}{n} \sin \dfrac{n\pi}{6}$

(c) $\sum \dfrac{1}{n^2} \cos \dfrac{n\pi}{7}$

(d) $\sum \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2n+4)} \sin n\varphi$

18. Vào khoảng năm 1990 nhà toán học Ấn Độ Srinivasa Ramanujan đã phát hiện ra công thức

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

William Gosper đã sử dụng chuỗi trên vào năm 1985 để tính ra 17 triệu chữ số đầu tiên của số π.

(a) Hãy kiểm tra chuỗi đã cho ở trên là hội tụ

(b) Nếu chỉ sử dụng 1 số hạng đầu tiên của chuỗi ta sẽ nhận được bao nhiêu chữ số chính xác trong khai triển thập phân của π? Điều gì xảy ra nếu ta sử dụng 2 số hạng đầu tiên?

19. * Giả sử $a_r \geq 0$ với mọi $r \geq 0$ và $\sum_{r=0}^{\infty} a_r = A < \infty$. Hãy chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r,s=0}^{n-1} a_{r+s} = 0.$$

20. (a) Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hội tụ với mọi số thực x.

(b) Từ câu (a) hãy suy ra rằng $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

21. * Hãy chỉ ra các phản ví dụ để các mệnh đề sau đây là sai ngoại trừ trường hợp nếu ta giả thiết tất cả các số hạng của chuỗi là cùng dấu với n đủ lớn

(a) $\sum a_n$ hội tụ nếu các tổng riêng của nó bị chặn.

(b) Nếu $b_n \neq 0$ với $n \geq k$ và $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$, ở đó $0 < L < \infty$ thì $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng đồng thời hội tụ hoặc phân kỳ.

(c) Nếu $a_n \neq 0$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

(d) Nếu $a_n \neq 0$ và $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right] < -1$ thì $\sum a_n$ hội tụ.

22. * Hãy chứng minh rằng chuỗi

$$\sum \frac{\sin n\varphi}{n^p}$$

hội tụ có điều kiện nếu $0 < p \geq 1$ và $\varphi \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

23. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \ln^n x; \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}; \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}.$$

24. Xét sự hội tụ đều trên miền đã chỉ ra của các chuỗi hàm sau

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}, x \in \mathbb{R}$

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, x \in \mathbb{R}$

    (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}), \quad 1/2 \leqslant |x| \leqslant 2.$

25. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}; \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}; \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} n^3 (x-5)^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \qquad e) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^n}{n2^n}; \qquad f) \sum_{n=0}^{\infty} n!(2x-1)^n$$

26. Tìm miền hội tụ của các chuỗi lũy thừa suy rộng sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x-2)^n}; \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n; \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin\frac{\pi}{2^n}$$

27. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 4^n$ hội tụ thì các chuỗi sau có hội tụ không

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-2)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-4)^n.$$

28. Giả sử chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có bán kính hội tụ là 2 và chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ là 3. Hãy tính bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$.

29. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa và tính bán kính hội tụ của chuỗi

$$a) f(x) = (x+1)^2 \sin^2 x; \qquad b) f(x) = \int \frac{e^x}{x} dx; \qquad c) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1};$$

$$d) f(x) = \arctan x; \qquad e) f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}.$$

30. Sử dụng công thức khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa, hãy tính các giới hạn sau

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}; \qquad b) \lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}.$$

31. Tính tổng của các chuỗi sau

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n; \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!}; \qquad c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!};$$

32. Khai triển thành chuỗi Fourier các hàm số sau trong khoảng chỉ ra tương ứng

a) $f(x) = x$ trong khoảng $(-\pi, \pi)$;

b) $f(x) = |x|$ trong khoảng $(-\pi, \pi)$;

c) $f(x) = sign(\cos x)$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải và đáp số một số bài tập

1.

2. Ta sử dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn: (a) hội tụ (b) hội tụ (c) phân kỳ (d) phân kỳ (e) hội tụ (f) hội tụ (g) phân kỳ (h) hội tụ.

3. $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{2}{n(n+1)}$. Rõ ràng tổng của chuỗi $= \lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

4. Xét các tích phân suy rộng tương ứng: (a) $p > 1$ (b) $p > 1$ (c) $p > 1$.

5. So sánh tổng riêng s_n và diện tích của miền nằm dưới đồ thị hàm số $y = 1/x$. Tiếp theo đó sử dụng công thức tính diện tích thông qua tích phân từng phần trên đoạn $[1, n]$.

6. (a) hội tụ: sử dụng tiêu chuẩn so sánh giới hạn
(b) hội tụ nếu $0 < r < 1$, phân kỳ nếu $r \geq 1$
(c) phân kỳ do số hạng tổng quát không hội tụ về 0
(d) hội tụ: theo tiêu chuẩn so sánh và áp dụng tiêu chuẩn tích phân Cauchy
(e) phân kỳ: theo tiêu chuẩn so sánh và tiêu chuẩn tích phân Cauchy
(f) hội tụ theo tiêu chuẩn D'Alembert hoặc theo tiêu chuẩn so sánh giới hạn.

7. Sử dụng tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi dương. Để ý bất đẳng thức $\ln(1 + x) < x$ với mọi $x > 0$.

8. Sử dụng các tiêu chuẩn D'Alembert hoặc tiêu chuẩn so sánh giới hạn:
(a) hội tụ (b) hội tụ (c) hội tụ (d) phân kỳ.

9. Chứng minh chuỗi $\sum \sin(a_n)$ hội tụ tuyệt đối bằng tiêu chuẩn so sánh. Từ đó suy ra nó hội tụ.

10. (a) phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alembert
(b) hội tụ theo tiêu chuẩn căn thức Cauchy khi và chỉ khi $0 < r < 1$ hoặc với $r = 1, a < -1$
(c) hội tụ theo D'Alembert (d) hội tụ theo D'Alembert
(e) hội tụ theo D'Alembert.

11. Do chuỗi hội tụ nên $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Từ đó suy ra $a_n < 1$ với $n > N$ đủ lớn. Tiếp theo sử dụng $0 \leq a_n^2 \leq a_n$ với $n > N$ và tiêu chuẩn so sánh đối với các chuỗi không âm.

12. (a) Ta xét $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} > \frac{n}{n+1}$. Theo tiêu chuẩn tỷ số dạng so sánh (xem Định lý 7, chuỗi phân kỳ khi so sánh với chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n}$.
(b) hội tụ (c) hội tụ theo tiêu chuẩn tỷ số
(d) hội tụ nếu $a < b - 1$, phân kỳ nếu $a \geq b - 1$ theo tiêu chuẩn Raabe.

13. Viết $c = e^t$ với $t \in \mathbb{R}$. Từ đó dễ dàng thông qua điều kiện đối với t để chuỗi hội tụ là $t < -1$. Đáp số $c < 1/e$.

14. (a) phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh (b) hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (c) hội tụ theo tiêu chuẩn so sánh (d) hội tụ do $a_n \sim e^{-n}$.

15. (a) hội tụ tuyệt đối do $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

    (b) Phân kỳ, số hạng tổng quát không tiến tới 0 khi $n \to \infty$.

16. Sử dụng tiêu chuẩn D'Alembert.

17. (a) hội tụ có điều kiện (nhóm 2 số hạng liên tiếp để tạo thành chuỗi đan dấu)
    (b) hội tụ có điều kiện (có thể sử dụng tiêu chuẩn Dirichlet để xét sự hội tụ)
    (c) hội tụ tuyệt đối (d) hội tụ tuyệt đối theo tiêu chuẩn Dirichlet.

18.

19. Sử dụng tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số cùng tính bị chặn của các số hạng a_n.

20. (a) $\sum(-1)^n$ (b) Xét hai chuỗi $\sum(-1)^n/n$ và $\sum\left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln n}\right]$
    (c) $\sum(-1)^n 2^n$ (d) xét chuỗi $\sum(-1)^n$.

21.

22. Ta trước tiên chỉ ra rằng với $\varphi \in (2\varepsilon, \pi - 2\varepsilon)$ luôn có

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{|\sin\varphi| + |\sin 2\varphi| + \cdots + |\sin n\varphi|}{n} \geq \frac{\sin\varepsilon}{2}.$$

Tiếp theo sử dụng phép "lấy tổng từng phần" theo Abel ta chứng minh mệnh đề bổ trợ sau:

Nếu $0 \leq a_{n+1} < a_n$ *và*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{v_n} > 0,$$

ở đó $\{v_n\}$ *là một dãy số dương sao cho*

$$\sum v_n(a_n - a_{n+1}) = \infty.$$

Khi đó $\sum a_n b_n = \infty$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Khuê, Phạm Ngọc Thao, Lê Mậu Hải, Nguyễn Đình Sang, Toán cao cấp - Tập 1 (A1) Giải tích một biến, NXB Giáo dục, 1997.

[2] James Stewart, Calculus, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Toán học cao cấp, tập 1,2,3, NXB Giáo dục 2006.

[4] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Bài tập Toán cao cấp, tập 1,2,3, NXB Giáo dục 2006.

[5] Y.Y. Liasko, A.C. Boiatruc, I.A.G. Gai, G.P. Golobac, Giải tích toán học, các ví dụ và các bài toán (tập 1, 2), NXB Đại học và THCN, 1978.