CHƯƠNG 2

Phép tính vi phân hàm một biến

Trong Chương 1 chúng ta đã nghiên cứu hàm liên tục cùng những tính chất cơ bản của loại hàm này. Một câu hỏi rất quan trọng là làm thế nào đo được độ thay đổi của một hàm số theo tương quan của biến số. Điều này được thể hiện rõ nhất khi ta muốn tính *gia tốc* của một chuyển động. Đó có thể coi là giới hạn của thay đổi vận tốc chia cho thay đổi của thời gian. Hơn nữa nhờ có đạo hàm mà ta có thể giải được bài toán đã đặt ra ở Chương 1 về vẽ tiếp tuyến với đồ thị tại một điểm cho trước.

2.1 Đạo hàm và vi phân cấp một

Ta có định nghĩa quan trọng sau đây:

2.1.1. Định nghĩa về đạo hàm. Cho f là hàm số xác định trên một khoảng mở (a, b). Hàm f được gọi là có đạo hàm hay là *khả vi* tại x_0 nếu như tồn tại giới hạn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Giới hạn này (nếu tồn tại) thì được ký hiệu là $f'(x_0)$ và đươc gọi là đạo hàm của f tại x_0.

Nếu điều này xảy ra ta cũng có thể viết

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h).$$

Ví dụ. (i) $f(x) = c$ với c hằng số là hàm khả vi và thỏa mãn $f'(x) = 0$ với mọi x.

(ii) $f(x) = x^2$ là khả vi tại mọi x_0 và $f'(x_0) = 2x_0$.

(iii) $f(x) = |x|$ khả vi tại mọi điểm $x_0 \neq 0$ nhưng *không* khả vi tại $x_0 = 0$. Chú ý rằng hàm f liên tục tại mọi điểm của trục số.

Mối quan hệ giữa tính liên tục và tính khả vi: Nếu một hàm là khả vi tại một điểm thì phải liên tục tại điểm đó. Điều ngược lại nói chung là không đúng (xem ví dụ (iii) ở trên).

2.1.2. Các phép tính về đạo hàm (a) Giả sử f, g là các hàm số khả vi tại điểm x_0. Khi đó ta có các công thức sau:
(i) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
(iii) $(f/g)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
(b) Công thức tính đạo hàm của hàm hợp hay còn gọi là *qui tắc dây chuyền*. Nếu f khả vi tại $g(x_0)$ và g khả vi tại x_0 thì

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)).g'(x_0)$$

Công thức tương đối khó chứng minh là (ii) và công thức đạo hàm của hàm hợp. Ta sẽ xử lý (ii), trường hợp còn lại làm tương tự. Cụ thể ta tiến hành như sau. Trước hết biến đổi

$$\begin{aligned}(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0) &= f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)\\ &= f(x_0+h)[g(x_0+h) - g(x_0) + g(x_0)[f(x_0+h) - f(x_0)]\\ &= f(x_0+h)[g'(x_0)h + o(h) + g(x_0)[f'(x_0)h + o(h)]\\ &= [f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]h + o(h).\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Sử dụng các công thức trên ta có thể tính được đạo hàm của một số hàm số đã học ở trước

2.1.3. Đạo hàm của một số hàm sơ cấp
(i) $(x^n)' = nx^{n-1}\ \forall x$;
(ii) $(\sin x)' = \cos x$;
(iii) $(\cos x)' = -\sin x$;
(iv) $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$;
(v) $(e^x)' = e^x$.
(vi) $(\ln x)' = 1/x\ \forall x > 0$.
Để chứng minh (ii), bằng cách sử dụng qui tắc dây chuyền để chuyển về gốc tọa độ, ta chỉ cần chứng minh

$$(\sin x)'(0) = 1.$$

Muốn vậy, ta sử dụng định nghĩa hình học của hàm sin để chứng minh bất đẳng thức sau (bằng cách so sánh diện tích):

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1\ \forall x > 0.$$

Cho $x \to 0$ và sử dụng phương pháp kẹp giữa ta có điều phải chứng minh. Đối với (v) thì phép chứng minh còn khó khăn hơn. Cũng như trên, ta chỉ cần chứng minh đạo hàm của e^x tại 0 bằng 1. Theo định nghĩa của đạo hàm thì điều này tương đương với chứng minh

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Muốn vậy, lấy một dãy $x_n \to 0$ tùy ý, ta sẽ chứng minh

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1.$$

Không giảm tổng quát ta có thể coi $x_n > 0$. Thế thì với mỗi n sẽ có N để

$$\frac{1}{N+1} \le x_n < \frac{1}{N}.$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{e^{\frac{1}{N+1}} - 1}{\frac{1}{N}} \le \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \le \frac{e^{\frac{1}{N}} - 1}{\frac{1}{N+1}}.$$

Cho $N \to \infty$ và sử dụng định nghĩa của e cùng với tiêu chuẩn kẹp giữa chúng ta có điều phải chứng minh.

Sau này ta sẽ thấy rằng hàm số e^x là hàm khả vi *duy nhất* mà đạo hàm lên không làm nó bị thay đổi.

2.1.4. **Vi phân hàm một biến.** Cho f là một hàm số xác định trên (a, b). Giả sử f khả vi tại $x_0 \in (a, b)$. Khi đó vi phân của f tại x_0 là biểu thức có dạng

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)h$$

trong đó h là một số thực (ta luôn hiểu h rất bé). Tương tự như vậy, nếu f là khả vi trên (a, b) thì vi phân của f trên (a, b) là biểu thức

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Ta hiểu vi phân của f tại x_0 chính là *xấp xỉ tuyến tính tốt nhất* của $f(x_0 + h) - f(x_0)$ khi h đủ bé. Điều này là có cơ sở, bởi vì theo định nghĩa của đạo hàm ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h) = df(x_0)(h) + o(h).$$

Tính chất bất biến của vi phân. Giả sử f là hàm khả vi của biến số x và x lại là hàm khả vi của biến số t. Khi đó f đương nhiên cũng có thể coi là hàm khả vi của biến số $t, t \mapsto f \circ x(t)$. Ta có theo định nghĩa của vi phân và theo qui tắc dây chuyền

$$d(f \circ \varphi)(t) = f'(\varphi(t))\Delta'(t)dt = f'(\varphi(t))d\varphi(t) = f'(x)dx = df(x).$$

Điều này có nghĩa là vi phân lấy theo biến t (mới) hay biến x cũa của hàm f là như nhau. Đây là tính chất rất hay của vi phân mà đạo hàm không có.

2.2 Các định lý cơ bản của hàm khả vi

Định lý Fermat về cực trị địa phương. Nếu f là hàm khả vi trên (a, b) và nếu x_0 là một điểm cực trị địa phương của hàm f, tức là có một khoảng mở $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sao cho $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất hay là nhỏ nhất của hàm f trên khoảng mở này. Khi đó ta có $f'(x_0) = 0$.
Chứng minh. Phép chứng minh khá đơn giản nếu như ta nắm vững khái niệm *giới hạn hàm số* đã học ở phần trước. Ta chỉ cần xét trường hợp $f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của f rên một khoảng $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nào đó. Khi đó theo định nghĩa của đạo hàm chúng ta có

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Tương tự như vậy

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Kết hợp lại ta có điều phải chứng minh.

Ta xét vấn đề tìm cực trị *toàn cục* của một hàm liên tục f trên $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Phương pháp làm là tìm tất cả các điểm cực trị địa phương của f cùng với hai giá trị $f(a)$, $f(b)$ và sau đó tìm cực trị của *tất cả* các cực trị địa phương này.

Định lý Fermat là điểm xuất phát cho tất cả các định lý quan trọng về hàm khả vi.

Ta bắt đầu bằng định lý thú vị sau đây về sự tồn tại các điểm mà đạo hàm triệt tiêu. Chú ý rằng chứng minh định lý này cần sử dụng hai định lý quan trọng là Định lý Weierstrass về tồn tại cực trị *toàn cục* của hàm liên tục và định lý Fermat về cực trị địa phương đã nói ở trên.

2.2.1. Định lý Rolle về tồn tại điểm dừng của hàm khả vi. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Giả sử $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.
Định lý quan trọng nhất của mục này, đóng vai trò then chốt trong nhiều bài toán về hàm khả vi là định lý sau đây:
2.2.2. Định lý Lagrange về giá trị trung bình của hàm khả vi. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó tồn tại giá trị $c \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Ý nghĩa của định lý trên nói rằng ta luôn tìm được một điểm trên đồ thị để tiếp tuyến tại đó *song song* với đường thẳng nối điểm đầu $(a, f(a))$ và điểm cuối $(b, f(b))$. Hơn nữa nó cho thấy rõ hơn mối liên hệ mật thiết của hàm số liên tục và đạo hàm của nó. Sử dụng định lý này ta có thể chứng minh được nếu $f' = 0$ thì f phải là hàm hằng. Có vẻ như không có một chứng minh dễ hơn của khẳng định này.
Chứng minh định lý Lagrange về giá trị trung bình dựa vào định lý Rolle. Ta chỉ việc xét hàm

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), a \leq x \leq b.$$

Khi đó g là hàm liên tục trên $[a, b]$ và thỏa mãn

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Chú ý rằng $g(a) = g(b) = f(a)$ nên ta có thể áp dụng định lý Rolle để kết thúc chứng minh.

2.3 Đạo hàm và vi phân cấp cao

Đạo hàm cấp từ 2 trở lên (nếu như tồn tại) được hiểu là đạo hàm cấp cao của hàm số f. Ta hiểu đạo hàm cấp cao được định nghĩa thông qua đạo hàm (cấp một) theo cách như sau:

$$f'' := (f')', f''' := (f'')', \cdots, f^{(n)} := (f^{n-1})'.$$

Vi phân cấp cao được định nghĩa thông qua đạo hàm cấp cao bằng cách như sau

$$d^n f(x_0)(h) := f^{(n)}(x_0)h^n, d^n f(x) := f^{(n)}(x)d^n x.$$

Các hàm ta gặp trong chương trình phổ thông nói chung là có đạo hàm cấp cao tùy ý trên miền xác định của chúng. Ta có thể kiểm tra điều này với các hàm ở mục 2.1.3.

2.4 Công thức Taylor

Vai trò quan trọng của đạo hàm cấp cao được thể hiện ở công thức Taylor về xấp xỉ gần đúng một hàm khả vi f bởi một đa thức được xác định thông qua đạo hàm cấp cao của f tại một điểm cho trước.

2.4.1. Định lý khai triển Taylor

Cho f là hàm khả vi cấp n tại $x_0 \in (a, b)$. Xác định đa thức Taylor bậc n của f tại x_0 bởi công thức

$$T_n(f, x_0, h) := f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n.$$

Khi đó ta có thể viết

$$f(x_0 + h) = T_n(f, x_0, h) + o(h^n).$$

Điều này có nghĩa là

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - T_n(f, x_0, h)}{h^n} = 0.$$

Thay vì chứng minh định lý này chúng ta có một số chú ý sau đây:
(i) Giả thiết f có đạo hàm cấp n tại x_0 nhìn thật thì đơn giản nhưng nó bao hàm ý là f có đạo hàm tới cấp $(n-1)$ trong một khoảng mở chứa x_0.
(ii) Khi $n = 1$ thì định lý Taylor chính là định nghĩa của đạo hàm $f'(x_0)$.
(iii) Chứng minh định lý Taylor sử dụng định lý Lagrange về giá trị trung bình được áp dụng tới một hàm thích hợp.

2.4.2 Công thức Taylor của một số hàm cơ bản

(i) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$.
(ii) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$.
(iii) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$.
(iv) $\ln(1 + x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

2.5 Một số ứng dụng của phép tính vi phân

Ta đã biết một số ứng dụng của phép tính vi phân như:
(i) Viết phương trình của tiếp tuyến với đường cong: Nếu hàm số $y = f(x)$ là khả vi tại $x = x_0$ thì đường tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0, f(x_0))$ có phương trình

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

(ii) Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khả vi trên khoảng mở (a, b) và liên tục trên $[a, b]$.
Bây giờ chúng ta giới thiệu thêm một ứng dụng về khử các dạng bất định trong giới hạn.
Qui tắc L'Hospital để tính giới hạn Cho f, g là các hàm khả vi trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ thỏa mãn $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Giả sử tồn tại giới hạn hàm

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Bài tập Chương 2

1. a) Cho hàm $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ với $g(4) = 8$, $g'(4) = 7$. Tìm $f'(4)$;
   b) Cho hàm $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ với $g(2) = 4$ và $g'(2) = -3$. Tìm $f'(2)$.

2. Tình đạo hàm của các hàm số sau

   $a)\ y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ $\qquad b)\ y = \sqrt[10]{(1-x)^4(1+x)^6}$ $\qquad c)\ y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$

   $d)\ y = \tan^2(x) - \cot^2 x$ $\qquad e)\ y = \sin^3 x \cos 3x$ $\qquad f)\ y = \dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x \sin x}$

   $g)\ y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\qquad h)\ y = e^x \ln(\sin x)$ $\qquad i)\ y = x^x.$

3. Cho hàm số $f(x) = x|x|$ với $x \in \mathbb{R}$.
   a) Tính đạo hàm $f'(x)$ với $x \neq 0$;
   b) Dùng định nghĩa đạo hàm để tính $f'(0)$;
   c) Hàm $f'(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ không?

4. Cho hàm số
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0; \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$
   a) Chứng minh hàm $f_1(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nhưng không khả vi tại $x = 0$;
   b) Chứng minh hàm $f_2(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}$ và tính $f_2'(x)$;
   c) Chứng minh $f_2'(x)$ không liên tục tại $x = 0$. Từ đó suy ra f_2 có đạo hàm cấp 1 trên $\mathbb{R}$, nhưng không có đạo hàm cấp 2 tại $x = 0$.

5. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ với $x \in \mathbb{R}$.
   a) Dùng định nghĩa đạo hàm để chứng minh rằng f không khả vi tại $x = 0$;
   b) Viết phương trình đường thẳng qua gốc tọa độ và điểm $A(a, \sqrt[3]{a})$ với $a \neq 0$. Nhận xét về vị trí của đường thẳng khi $a \to 0$.

6. Cho hàm số
$$f(x) = \begin{cases} -1-2x & \text{nếu } x < -1 \\ x^2 & \text{nếu } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$
   Tính đạo hàm của hàm $f(x)$. Vẽ đồ thị của $f(x)$ và $f'(x)$ (tại những điểm đạo hàm tồn tại).

7. Tìm các số thực a, b để hàm số sau có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leqslant 2 \\ ax + b & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

   Nêu ý nghĩa hình học của kết quả tìm được.

8. Tìm đạo hàm phải và đạo hàm trái của các hàm số sau tại $x = 0$

$$a)\ f(x) = |x| \qquad\qquad b)\ f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}.$$

9. Vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng (với gốc và hướng đã cho) cho bởi phương trình

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad t \geqslant 0,$$

   ở đây t đơn vị là giây, s đơn vị là mét.
   a) Tìm vận tốc của vật theo thời gian t;
   b) Tìm vận tốc của vật tại thời điểm $2\,s$, $4\,s$;
   c) Tại thời điểm nào vận tốc tức thời của vật bằng 0?
   d) Khi nào vật chuyển động hướng về phía trước (chuyển động theo hướng dương)? Khi nào vật chuyển động hướng về phía sau?

10. Đối với một thanh kim loại đồng nhất và đồng hình dạng (hình dạng mọi chỗ theo chiều dài đều giống nhau), ta gọi khối lượng dài (linear density) là khối lượng (theo kg) của thanh kim loại trên mỗi đơn vị độ dài (theo m).
    Giả sử ta có thanh kim loại không đồng nhất, nhưng đồng hình dạng. Giả sử khối lượng của phần thanh kim loại tính từ đầu bên trái (coi là điểm gốc) đến điểm cách đầu bên trái một khoảng x mét là $m = f(x)$ với $x > 0$.
    a) Tính khối lượng dài trung bình của phần của thanh kim loại nằm giữa $x = x_1$ và $x = x_2$ ($x_1 < x_2$). Từ đó tính khối lượng dài tại x_1;
    b) Áp dụng (a) cho thanh kim loại ứng với $m = f(x) = \sqrt{x}$.
    i) Tính khối lượng dài trung bình của phần của thanh kim loại ứng với $x = 1$ và $x = 1.21$;
    ii) Tính khối lượng dài tại $x = 1$, $x = 1.21$.

11. Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B

$$A + B \to C.$$

Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a\,(mol/l)$. Khi đó nồng độ của C theo thời gian được cho bởi công thức

$$[C] = \frac{a^2Kt}{aKt+1}\,(mol/l),$$

ở đó K là một hằng số.
a) Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm t;
b) Chứng minh nếu $x = [C]$ thì

$$\frac{dx}{dt} = K(a-x)^2.$$

c) Chuyện gì xảy ra với nồng độ các chất khi $t \to \infty$?
d) Chuyện gì xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \to \infty$?

12. Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 1 triệu con và số lượng của quần thể tăng gấp đôi trong vòng 1 giờ. Khi đó số lượng cá thể ở thời điểm $t > 0$ là $n = f(t) = 10^6.2^t$ với t đơn vị là giờ.
a) Tính số lượng vi khuẩn trong vòng 3 giờ, 4 giờ.
b) Tính tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn sau 6 giờ (tức là tại thời điểm $t = 6$ giờ).

13. Không khí được bơm vào một quả bóng hình cầu sao cho thể tích của quả bóng tăng $100\,cm^3/s$. Hỏi tốc độ tăng bán kính của quả bóng bằng bao nhiêu khi đường kính bằng $50\,cm$?

14. Chứng minh rằng hàm số $y = ae^{\alpha x} + be^{\beta x}$, với a, b, α, β là các số thực, thỏa mãn phương trình

$$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = 0.$$

15. Chứng minh rằng hàm hàm $y = e^{-\alpha x}(a\sin\omega x + b\cos\omega x)$, với a, b, α, ω, là các số thực thỏa mãn phương trình

$$y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2+\omega^2)y = 0.$$

16. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

$a)\ y = \dfrac{1}{cx+d}\ (c \neq 0)$ $\qquad b)\ y = \dfrac{ax+b}{cx+d}\ (c \neq 0)$ $\qquad c)\ y = \ln(2x+1)$

$d)\ y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$ $\qquad e)\ y = \sqrt[3]{3x-1}$ $\qquad f)\ y = e^{ax}$

$g)\ y = \sin(2x)$ $\qquad h)\ y = \sin^2 x$ $\qquad i)\ y = \sin x \sin 3x$

17. Công thức Leibniz: Nếu f và g khả vi trên (a, b) thì

$$\Big(f(x)g(x)\Big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x), \quad x \in (a, b)$$

ở đây $f^{(0)}(x) = f(x)$ và $g^{(0)}(x) = g(x)$.
Dùng công thứ Leibniz để tính các đạo hàm cấp 10 của các hàm sau

$$y = x^3 e^x \qquad\qquad y = x^2 \cos 2x.$$

18. Vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng (với gốc và hướng đã cho) cho bởi phương trình

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad t \geqslant 0,$$

ở đây t đơn vị là giây, s đơn vị là mét.
a) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm t;
b) Khi nào vật chuyển động nhanh dần?
c) Vẽ đồ thị biểu thị vị trí, vận tốc, gia tốc của vật trên cùng một hệ tọa độ ứng với $0 \leqslant t \leqslant 5$.

19. Tìm cực trị của các hàm số sau
a) $f(x) = \sin 2x - 2\sin x$ với $0 < x < 2\pi$;
b) $f(x) = x^3$;
c) $f(x) = |x^2 - 1|$.

20. Từ 0^o đến 30^o, thể tích V của $1\,kg$ nước (tính theo cm^3) ở nhiệt độ T được tính gần đúng bởi công thức

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3.$$

Tìm nhiệt độ mà tại đó thể tích nước nhỏ nhất.

21. Cho hàm f liên tục trên $[0, 2]$, khả vi trên $(0, 2)$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ và $f(2) = 1$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 2)$ sao cho $f'(c) = 0$.

22. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = 2020c^{2019}$.

23. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ để $f'(c) + 2f(c) = 0$.

24. Cho hàm f khả vi trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = -3$ và $f'(x) \leqslant 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất của $f(2)$.

25. Dùng Định lý Lagrange để chứng minh các bất đẳng thức sau
a) $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$;
b) $\dfrac{1}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{a}$ với mọi $0 < a < b$.

26. Viết khai triển Taylor của các hàm sau tại $x = 0$
a) $f(x) = \sin 3x$ đến số hạng x^3;
b) $f(x) = \cos^2 x$ đến số hạng x^4;
c) $f(x) = e^{x+x^2}$ đến số hạng x^2;
d) $f(x) = \sqrt{1+x}$ đến số hạng x^2.

27. Tìm các số thực a và b để $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^3} + a + \dfrac{b}{x^2}\right) = 0$.

28. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ tại điểm $(a, \sqrt{1-a^2})$ với $-1 < a < 1$. Nhận xét về vị trí của tiếp tuyến khi $a \to 1^-$.

29. Khảo sát và vẽ đồ thị các hàm số sau

$$a)\, y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad b)\, y = xe^x$$

$$c)\, y = \frac{x^2}{x^2-1} \qquad d)\, y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}.$$

30. Dùng quy tắc L'Hospital để tính các giới hạn sau

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} \qquad f)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha > 0)$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}\quad (n\in\mathbb{N}^*, a>1) \qquad c)\ \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x \quad (\alpha>0)$$

$$d)\ \lim_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x) \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right) \qquad h)\ \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$i)\ \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad j)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \qquad k)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}.$$

31. Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

khả vi trên $\mathbb{R}$.

Lời giải một số bài toán

5. Phương trình đường thẳng là $x - \sqrt[3]{a^2}y = 0$. Khi $a \to 0$ thì đường thẳng "hội tụ" tới đường thẳng $x = 0$. Đó cũng là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$.

7. Đáp số $f(x) = 4x - 4$. Đường thẳng $y = 4x - 4$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $(2; 4)$.

9. a) Vận tốc là đạo hàm của quãng đường theo thời gian. Suy ra

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9.$$

b) Tại $t = 2\,s$ ta có $v(2) = -3\,(m/s)$ và tại $t = 4\,s$ ta có $v(4) = 9\,(m/s)$.

c) Vân tốc tức thời bằng 0 có nghĩa là

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1,\ t = 3.$$

Vậy vận tốc tức thời tại thời điểm $1\,s$ và $3\,s$ bằng 0.

d)Vật chuyển động hướng về phía trước khi

$$v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1, \quad t > 3.$$

Vật chuyển động hướng về phía sau khi $v(t) < 0$ và ta tìm được $1 < t < 3$.

10. a) Khối lượng của phần của thanh kim loại nằm giữa $x = x_1$ và $x = x_2$ là $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$. Nên khối lượng dài trung bình (average density) của thanh cho bởi

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Cho $x_2 \to x_1$ tức là $\Delta x \to 0$, khối lượng dài trung bình sẽ dần tới khối lượng dài tại x_1

$$\rho(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = f'(x_1).$$

b) Khối lượng dài trung bình cần tìm là

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.21) - f(1)}{1.21 - 1} = \frac{\sqrt{1.21} - 1}{0.21} \approx 0.476\ (kg/m).$$

Khối lượng dài tại $x = 1$, $x = 1.21$ tương ứng là

$$\rho(1) = f'(1) = 0.5\,(kg/m), \qquad \rho(1.21) = f'(1,21) = \frac{1}{2.2} \approx 0.455\,(kg/m).$$

11. a) Xét sự thay đổi nồng độ của C trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2: $\Delta[C] = [C](t_2) - [C](t_1)$. Tốc độ phản ứng trung bình là

$$\frac{\Delta[C]}{\Delta t} = \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Tốc độ phản ứng tại $t = t_1$ là

$$\frac{d[C]}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[C](t_2) - [C](t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Do đó tốc độ phản ứng là

$$\frac{d[C]}{dt} = \frac{a^2K(aKt+1) - a^2Kt.aK}{(aKt+1)^2} = \frac{a^2K}{(aKt+1)^2}.$$

b) Theo tính toán ở (a) ta có $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a^2K}{(aKt+1)^2}$. Mặt khác, từ định nghĩa ta có

$$K(a-x)^2 = K\Big(a - \frac{a^2Kt}{aKt+1}\Big)^2 = \frac{Ka^2}{(aKt+1)^2}.$$

Nên ta có đẳng thức.
c) Hiển nhiên

$$\lim_{t\to\infty}[C] = \lim_{t\to\infty} \frac{a^2Kt}{aKt+1} = a\,(mol/l).$$

$$\lim_{t\to\infty}[A] = \lim_{t\to\infty}[B] = \lim_{t\to\infty}\Big(a - \frac{a^2Kt}{aKt+1}\Big) = 0\,(mol/l).$$

Vậy nồng độ của C dần tới $a\,(mol/l)$, còn nồng độ của $[A]$ và $[B]$ dần tới $0\,(mol/l)$.
d) Ta có

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dx}{dt} = \lim_{t\to\infty}\frac{a^2K}{(aKt+1)^2} = 0.$$

Vậy tốc độ phản ứng dần tới 0.
12. Ta thấy độ tăng trưởng trung bình giữa hai thời điểm t_1 và t_2 là

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nên tốc độ tăng trưởng tại thời điểm t_1 là

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = f'(t_1).$$

Cho nên tốc độ tăng trưởng tại $t = 6$ là $f'(6) = 10^6.2^6 \ln 2 \approx 44361419$.

13. Ta đã biết $\dfrac{dV}{dt} = 100\,cm^3/s$ và cần tìm $\dfrac{dr}{dt}$ khi $r = 25\,cm$. Do $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ nên

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}.$$

Khi $\dfrac{dV}{dt} = 100$ và $r = 25$ ta có $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{25\pi}$.

18. a) Đạo hàm của hàm vị trí ra hàm biểu thị vận tốc, đạo hàm của vận tốc là gia tốc. Nên vận tốc và giá tốc thứ tự là

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9, \quad a(t) = 6t - 12.$$

b) Vật chuyển động nhanh dần khi vận tốc và gia tốc cùng âm hay cùng dương (khi hai đại lượng đều dương chúng chuyển động nhanh dần về phía chiều dương, khi hai đại lượng đều âm chúng chuyển động nhanh dần về phía chiều âm). Vậy ta cần tìm t sao cho

$$(3t^2 - 12t + 9)(6t - 12) > 0 \Leftrightarrow 1 < t < 2, \quad t > 3.$$

19. a) Hàm đạt cực trị tại $x = 2\pi/3$ và $x = 4\pi/3$;
b) Hàm không có cực trị mặc dù tại $x = 0$ đạo hàm triệu tiêu (nhưng không đổi dấu);
c) Hàm có 3 cực trị tại $x = 0$, $x = \pm 1$.

20. Ta có

$$V'(T) = -0.06426 + 0.0170086T - 0.0002037T^2 = 0$$

tại $T \approx 3.9665^o$ (chú ý $0^o \leqslant T \leqslant 30^o$). Ta tính được

$$V(0) = 999.87, \quad V(30) \approx 1003.7641, \quad V(3.9665) \approx 999.7447.$$

Cho nên tại $T = 3.9665^o$, thể tích của $1\,kg$ nước là nhỏ nhất.

21. Hàm f đạt giá trị lớn nhất tại $x = c$ với $c \in [0, 2]$. Do $f(c) \geqslant f(1) = 2$ nên c khác 0 và 2. Cho nên c là điểm cực đại của f. Định lý Fermat kéo theo $f'(c) = 0$.

22. Chỉ cần áp dụng Định lý Rolle cho hàm $g(x) = f(x) - x^{2020}$.

23. Chỉ cần áp dụng Định lý Rolle cho hàm $g(x) = f(x)e^{2x}$.

24. Theo Định lý Lagrange ta có

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0) \quad c \in (0, 2).$$

Do $f'(c) \leqslant 5$ nên $f(2) = f(0)+2f'(c) \leqslant -3+2.5 = 7$. Chọn hàm $f(x) = 5x-3$ thì dấu bằng đạt được. Nên giá trị lớn nhất của $f(2)$ là 7.

25. Chỉ cần áp dụng Định lý Lagrange cho các hàm $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \ln x$ trên $[a, b]$.

27. Ta có
$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) = 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^3).$$
Cho nên
$$\frac{\sin 2x}{x^3} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{x^2} + o(1).$$
Cho nên ta phải chọn $a = 4/3$ và $b = -2$.

28. Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Nên phương trình tiếp tuyến tại $(a, \sqrt{1-a^2})$ có phương trình là
$$y = \frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) + \sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow ax + \sqrt{1-a^2}y = 1.$$
Khi $a \to 1^-$ tiếp tuyến "dần tới" đường thẳng $x = 1$. Chú ý rằng đồ thị hàm số là nửa trên của đường tròn đơn vị và đường thẳng $x = 1$ là một tiếp tuyến của đường tròn.

31. Ta chỉ cần chứng minh tồn tại đạo hàm tại $x = 0$. Ta có
$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$
Đặt $t = 1/h$ thì $|t| \to \infty$ khi $h \to 0$. Cho nên
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{|t|\to\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{2te^{t^2}} = 0.$$
Vậy f khả vi tại $x = 0$ và $f'(0) = 0$.