Mục lục

CHƯƠNG 3

PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN

3.1 Nguyên hàm và tích phân bất định

Định nghĩa 1. Ta nói hàm F là một nguyên hàm của f trong khoảng (a, b) nếu F khả vi trong khoảng này và $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in (a, b)$.

Ví dụ 3.1.

- Hàm $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ là nguyên hàm của $f(x) = x^4$ trong $\mathbb{R}$.
- Hàm $F(x) = \ln x$ là nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x}$ trong khoảng $(0, \infty)$.
- Hàm $F(x) = \sin x$ là nguyên hàm của $f(x) = \cos x$ trong $\mathbb{R}$.

Chú ý rằng $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$ với $C \in \mathbb{R}$ cũng là một nguyên hàm của x^4 trong $\mathbb{R}$. Ta có kết quả tổng quát sau.

Định lí 1. Giả sử hàm F là một nguyên hàm của f trong khoảng (a, b). Khi đó

1. Với mọi hằng số C, $F + C$ cũng là một nguyên hàm của f trong (a, b).
2. Ngược lại, mọi nguyên hàm của f trong khoảng (a, b) đều có dạng $F + C$.

Họ tất cả các nguyên hàm của f được gọi là tích phân bất định của f và ký hiệu là $\displaystyle\int f(x)dx$. Sau đây, ta liệt kê danh sách nguyên hàm của một số hàm sơ cấp quen biết, gọi là bảng tích phân cơ bản.

1. $\displaystyle\int 1dx = x + C$
2. $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$

6. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},\ a > 0; \int e^x dx = e^x + C$

7. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

Để trả lời cho câu hỏi, hàm f phải thỏa mãn điều kiện nào để có nguyên hàm, ta có kết quả sau.

Định lí 2. Mọi hàm f xác định và liên tục trên $[a, b]$ thì có nguyên hàm trong khoảng đó.

Để tính tích phân bất định của một hàm số, cách cơ bản nhất là đưa tích phân này về các tích phân cơ bản đã biết. Ngoài ra, ta có thể sử dụng một số kỹ thuật bao gồm phép đổi biến và tích phân từng phần.

Phép đổi biến

Phép đổi biến được thực hiện dựa trên mệnh đề sau.

Mệnh đề 3. Nếu F là một nguyên hàm của f trong (a, b) và u là một hàm khả vi thì

$$\int f(u(t))u'(t)dt = F(u(t)) + C.$$

Thực chất ta đã thực hiện phép đổi biến $x = u(t)$ và thay $dx = u'(t)dt$. Khi đó tích phân $\int f(x)dx$ chuyển thành tích phân dạng $\int g(t)dt$ với $g(t) = f(u(t))u'(t)$, có thể tính được dễ dàng hơn. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, ta có thể gặp tích phân $\int f(x)dx$ với $f(x)$ có dạng $f(x) = g(u(x)).u'(x)$. Khi đó phép đổi biến $t = u(x)$ dẫn đến tích phân $\int g(t)dt$, có thể đưa về tích phân cơ bản.

Ví dụ 3.2. Tính $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Để có thể bỏ được căn, ta đặt $x = a\sin t$, khi đó

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t,\ dx = a\cos t dt.$$

Từ đó

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int a^2\cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C.$$

Ví dụ 3.3. Tính tích phân $\int \frac{dx}{x\ln x}$. Đặt $t = \ln x$ ta có

$$dt = \frac{dx}{x} \text{ và } \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C.$$

Tích phân từng phần

Phương pháp tích phân từng phần dựa trên công thức đạo hàm của một tích

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ hay } uv' = (uv)' - u'v.$$

Tích phân hai vế của đẳng thức trên ta được

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Viết theo cách ngắn gọn ta có $\int udv = uv - \int vdu$.

Ví dụ 3.4. Tính $\int x\sin x dx$. Đặt $u = x, dv = \sin x dx$, ta có $du = dx$ và $v = -\cos x$. Do vậy

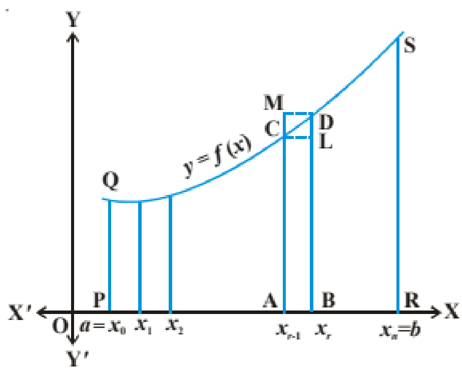
$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Chú ý rằng phương pháp tích phân từng phần hữu dụng cho các dạng tích phân $\int x^m e^{ax} dx$, $\int x^m \sin ax dx$, $\int x^m \cos ax dx$, $\int x^m \ln^k x dx$.

3.2 Tích phân xác định

Định nghĩa tích phân xác định

Cho hàm f xác định và không âm trên đoạn $[a,b]$. Ta đặt vấn đề tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $a \le x \le b$ và $0 \le y \le f(x)$.



Ta làm như sau: chia đoạn $[a,b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, phép chia này gọi là một phân hoạch, ký hiệu là P. Giả sử f là hàm bị chặn. Khi đó trên mỗi đoạn nhỏ $[x_{r-1}, x_r]$ ta có thể xác định $m_r = \inf\{f(x) : x \in [x_{r-1}, x_r]\}$ và $M_r = \sup\{f(x) : x \in [x_{r-1}, x_r]\}$. Lập các tổng

$$s_P = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1}), \; S_P = \sum_{r=1}^{n} M_r(x_r - x_{r-1}),$$

lần lượt gọi là tổng dưới và tổng trên của phân hoạch P. Quan sát trên hình vẽ, ta có thể thấy $s_P \le I \le S_P$ với I là diện tích cần tính. Có thể chứng minh được rằng nếu khoảng cách giữa các điểm chia càng nhỏ, tức $d(P) = \max\{x_r - x_{r-1} : 1 \le r \le n\}$ giảm thì tổng dưới s_P sẽ tăng còn tổng trên S_P sẽ giảm. Khi đó tồn tại $I_* = \sup_P \{s_P\}$ và $I^* = \inf_P \{S_P\}$, ở đây supremum và infimum được lấy trên tất cả các phân hoạch của đoạn $[a,b]$. Nếu $I_* = I^*$ thì rõ ràng chúng chính là diện tích I cần tìm.

Từ bài toán tính diện tích hình phẳng vừa đề cập, ta định nghĩa tích phân xác định như sau.

Định nghĩa 2. Cho hàm $f(x)$ xác định và bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Với mỗi phân hoạch P của đoạn $[a, b]$:

$$x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b,$$

ta xác định các tổng dưới và tổng trên

$$s_P = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1}),\ S_P = \sum_{r=1}^{n} M_r(x_r - x_{r-1}),$$

ở đó $m_r = \inf\{f(x) : x \in [x_{r-1}, x_r]\}$ và $M_r = \sup\{f(x) : x \in [x_{r-1}, x_r]\}$. Nếu $\sup_P\{s_P\} = \inf_P\{S_P\} = I$ thì ta nói $f(x)$ khả tích trên $[a, b]$ và I là tích phân xác định của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$, ký hiệu

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Nếu lấy $\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ rồi lập tổng $\sigma(f, P, \xi) = \sum\limits_{r=1}^{n} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$, thì tổng này gọi là tổng Riemann của f ứng với phân hoạch P và cách chọn các điểm ξ_r. Do $s_P \leq \sigma(f, P, \xi) \leq S_P$ nên f khả tích khi và chỉ khi

$$\sup_P\{s_P\} = \inf_P\{S_P\} = \lim_{d(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

và giới hạn sau cùng không phụ thuộc phân hoạch P cũng như cách chọn các điểm ξ_r.

Để xác định khi nào một hàm cho trước khả tích, ta có các định lý sau.

Định lí 4. Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì nó khả tích trên đoạn này.

Định lí 5. Nếu f bị chặn trên $[a, b]$ và chỉ có một số hữu hạn điểm gián đoạn thì nó khả tích trên đoạn này.

Định lí 6. Nếu f bị chặn và đơn điệu trên $[a, b]$ thì nó khả tích trên đoạn này.

Ví dụ 3.5. Tính $\displaystyle\int_0^1 xdx$. Rõ ràng $f(x) = x$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ nên nó khả tích trên đoạn này. Để tính tích phân, ta lấy phân hoạch đều đoạn $[0, 1]$ bởi các điểm chia $x_r = \dfrac{r}{n}, r = 0, 1, ..., n$, và chọn $\xi_r = x_r$ với $r = 1, ..., n$. Khi đó ta có tổng Riemann

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2}.$$

Vậy

$$\int_0^1 x dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, P, \xi) = \frac{1}{2}.$$

Tính chất của tích phân xác định

Ta phát biểu một số tính chất sau đây của tích phân xác định. Giả sử f và g là các hàm khả tích trên $[a, b]$.

- *Tính chất 1 (tính chất tuyến tính)*

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx,\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- *Tính chất 2.* Nếu f khả tích trên đoạn lớn nhất trong các đoạn $[a, b]$, $[a, c]$ và $[c, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- *Tính chất 3 (tính chất so sánh)*

  (i) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

  (ii) Nếu $f(x) \leq g(x), x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

  (iii) Nếu f khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì $|f|$ cũng khả tích trên đoạn này và

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

  (iv) Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$ thì

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

- *Tính chất 4 (Định lý trung bình)*. Giả sử f khả tích trên $[a, b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ với mọi $x \in [a, b]$. Khi đó tồn tại $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a).$$

  Hơn nữa, nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Định lý trung bình có vai trò quan trọng trong việc chứng minh định lý cơ bản của giải tích cổ điển, từ đó dẫn đến công thức Newton-Leibniz, là công cụ chính để tính tích phân xác định.

Cách tính tích phân xác định

Cho f là hàm số xác định trên $[a, b]$. Xét hàm

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a, b].$$

Kết quả sau đây gọi là định lý cơ bản của giải tích cổ điển.

Định lí 7. (i) Nếu f khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì Φ liên tục trên đoạn này.

(ii) Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì Φ là một nguyên hàm của f trong (a, b).

Bây giờ cho f là hàm liên tục. Giả sử F là một nguyên hàm của f trong (a, b). Khi đó, vì Φ cũng là một nguyên hàm của f trong (a, b) nên $F(x) = \Phi(x) + C$, với C là một hằng số. Ta có

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Công thức

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b$$

được gọi là công thức Newton-Leibniz.

Ví dụ 3.6. Tính tích phân $I = \int_a^b \sin x dx$. Do $\sin x$ liên tục và có nguyên hàm là $-\cos x$ trên mọi đoạn $[a, b]$ nên theo công thức Newton-Leibniz, ta có $I = -\cos x|_a^b = \cos a - \cos b$.

Ví dụ 3.7. Dùng tích phân xác định, tính giới hạn

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$$

Có thể thấy biểu thức cần tính giới hạn là tổng Riemann của hàm $f(x) = \sqrt{1+x}$ trên đoạn $[0, 1]$ với phân hoạch đều và cách chọn $\xi_r = \dfrac{r}{n}$. Do đó

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Đổi biến trong tích phân xác định

Tương tự phép đổi biến trong tích phân bất định, ta có kết quả sau.

Định lí 8. Giả sử

1. $u : [\alpha, \beta] \to U$ khả vi liên tục, với $U \subset \mathbb{R}$;
2. $f : U \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Khi đó

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

Trường hợp xuất phát từ tích phân ở vế trái, ta sẽ sử dụng phép đổi biến $x = u(t)$ với t biến thiên trong đoạn $[\alpha, \beta]$ phù hợp. Trường hợp cần tính tích phân có dạng ở vế phải, ta sẽ đặt $u(t) = x$ để đưa về tích phân bên trái, có thể tính được dễ dàng hơn.

Ví dụ 3.8. Tính tích phân $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$ với $a > 0$. Ta dùng phép đổi biến $x = a\sin t$ với $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Khi đó

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t,\ dx = a\cos tdt,$$

và

$$I = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2\pi}{2}.$$

Ví dụ 3.9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$. Ta viết $\cos^3 x \sin^2 x dx = (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx$. Từ đó, có thể đổi biến $u = \sin x$ đưa tích phân về

$$I = \int_0^1 (1 - u^2) u^2 du = \left(\frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Phương pháp tích phân từng phần

Lý luận tương tự như trong tích phân bất định, ta có công thức sau:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Ví dụ 3.10. Tính tích phân $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Ta viết

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x dx$$

và đặt $u = \sin^{n-1} x, v'(x) = \sin x$. Khi đó lấy $v(x) = \cos x$ và áp dụng công thức tích phân từng phần, ta nhận được

$$\begin{aligned} I_n &= \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Từ đó ta có công thức truy hồi $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Chú ý rằng $I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = 1$, ta nhận được kết quả như sau:

- Nếu $n = 2m$ (chẵn) thì

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \ldots \\ &= \frac{(2m-1).(2m-3)\ldots 3.1}{2m.(2m-2)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Tương tự, nếu $n = 2m+1$ (lẻ) thì

$$I_{2m+1} = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

3.3 Ứng dụng của tích phân xác định

Tính diện tích hình phẳng

Ta xét một số trường hợp sau.

(a) *Trường hợp 1*. Xét hình phẳng D giới hạn bởi các đường $x = a, x = b$, $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cho trong hệ tọa độ Descartes. Khi đó diện tích miền D cho bởi công thức

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

(b) *Trường hợp 2*. Với hình phẳng D có biên xác định bởi hệ tham số $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ với $t \in [\alpha, \beta]$, ta có công thức tính diện tích như sau

$$|D| = \int_\alpha^\beta |\psi(t)\varphi'(t)|dt.$$

(c) *Trường hợp 3*. Xét hình phẳng D có biên cho trong hệ tọa độ cực $r = r(\varphi)$ với $\varphi \in [\alpha, \beta]$, công thức diện tích như sau

$$|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

Tính độ dài đường cong phẳng

(a) Trường hợp đường cong Γ cho bởi $y = f(x)$ với $x \in [a, b]$, với f là hàm khả vi liên tục, ta có công thức tính độ dài như sau

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

(b) Nếu Γ là đường cong cho bởi hệ $x = x(t), y = y(t)$ với $t \in [\alpha, \beta]$ thì đồ dài của nó cho bởi công thức

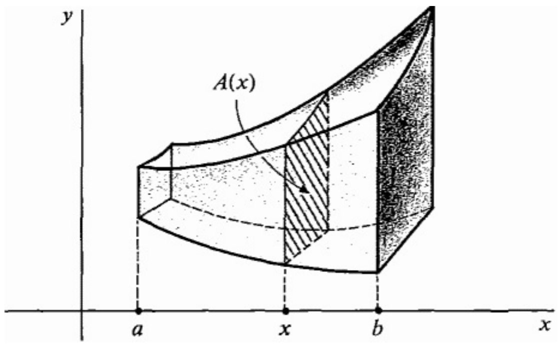
$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

(c) Trường hợp đường cong Γ cho bởi phương trình trong hệ tọa độ cực $r = r(\varphi)$ với $\varphi \in [\alpha, \beta]$, ta có thể đưa về trường hợp (b) bằng hệ tham số $x = r(\varphi)\cos\varphi, y = r(\varphi)\sin\varphi$ với $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Từ đó dẫn đến công thức tính độ dài của Γ như sau

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Tính thể tích vật thể

Cho vật thể V có thiết diện hai đầu tạo bởi hai mặt phẳng $x = a$ và $x = b$ như hình vẽ sau đây.



Giả sử diện tích thiết diện của V tạo bởi một mặt phẳng vuông góc với Ox là $A(x)$. Khi đó thể tích của V xác định bởi

$$|V| = \int_a^b A(x)dx.$$

Xét trường hợp đặc biệt khi V là vật thể tròn xoay tạo bởi đường cong $y = f(x), x \in [a, b]$, quay xung quanh Ox, ta có diện tích thiết diện là $A(x) = \pi[f(x)]^2$. Do đó

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Tính diện tích mặt tròn xoay

Khi xoay đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \in [a, b]$ xung quanh Ox, ta có mặt tròn xoay với diện tích cho bởi công thức

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

3.4 Tích phân suy rộng

Tích phân với cận vô hạn

Cho $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ là hàm số khả tích trên mỗi đoạn $[a, A]$ với mọi $A > a$. Khi đó nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{A \to \infty} \int_a^A f(x)dx \tag{3.4.1}$$

thì ta gọi giới hạn này là tích phân suy rộng của f trên $[a, \infty)$ và ký hiệu là

$$\int_a^\infty f(x)dx. \tag{3.4.2}$$

Trong trường hợp này ta cũng nói tích phân (3.4.2) là hội tụ. Nếu giới hạn (3.4.1) không tồn tại hoặc bằng vô hạn, ta nói tích phân (3.4.2) là phân kỳ.

Tương tự, trong trường hợp $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$, là hàm khả tích trên mỗi đoạn $[B, a]$ với $B < a$, ta định nghĩa

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{B \to -\infty} \int_B^a f(x)dx. \tag{3.4.3}$$

Như vậy, để tính tích phân suy rộng dạng (3.4.2) hoặc (3.4.3), ta có thể sử dụng công thức Newton-Leibniz. Ví dụ với (3.4.2), ta tính tích phân $\displaystyle\int_a^A f(x)dx$ bằng công thức Newton-Leibniz, sau đó qua giới hạn khi A tiến tới ∞. Nếu F là một nguyên hàm của f thì ta có thể viết

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a).$$

Ví dụ 3.11. Ví dụ tính $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx$. Ta có

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1.$$

Ví dụ 3.12. Tính $I = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$. Ta có

$$I = \arctan x\Big|_{-\infty}^0 = \arctan 0 - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Bây giờ ta xem xét các điều kiện để tích phân suy rộng với cận vô hạn là hội tụ. Trước tiên xét trường hợp hàm $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ không âm. Tức là $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, \infty)$. Khi đó hàm

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx$$

là hàm tăng theo A. Do đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn $\lim\limits_{A\to\infty} F(A)$ là $F(A)$ bị chặn trên $[a, \infty)$. Từ đó ta có các kết quả sau đây.

Định lí 9 (tiêu chuẩn so sánh)**.** Cho hai hàm số f và g xác định trên $[a, \infty)$, khả tích trên mỗi đoạn $[a, A]$.

1. Giả sử $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, \infty)$. Khi đó
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ thì $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ phân kỳ thì $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ cũng phân kỳ.
2. Giả sử $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, \infty)$ và tồn tại giới hạn $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ với k là một số dương. Khi đó tích phân $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ và $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Chú ý: Khi $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ thì ta viết $f(x) \sim kg(x)$ khi $x \to \infty$.

Ví dụ 3.13. Xét tích phân $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^6 + x^2 + 1}}$. Rõ ràng

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^6 + x^2 + 1}} \leq \frac{1}{x^2} \text{ và } \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ hội tụ.}$$

Do đó tích phân đã cho hội tụ.

Ví dụ 3.14. Xét tích phân $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x})dx$. Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x} \ln(1 + \dfrac{1}{x})$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ với $x \in [1, \infty)$. Ta có

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ khi } x \to \infty.$$

Do đó tích phân đã cho hội tụ.

Chuyển sang trường hợp f là hàm có dấu bất kỳ, ta có khẳng định sau.

Định lí 10. Cho $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ là hàm khả tích trên mỗi đoạn $[a, A]$ với $A > a$. Khi đó nếu tích phân $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ hội tụ thì tích phân $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ cũng hội tụ. Lúc này ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ 3.15. Xét tính hội tụ của tích phân $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}dx$. Với $f(x) = \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$, ta thấy $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $x \in [1,\infty)$, và tích phân $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ hội tụ. Theo theo tiêu chuẩn so sánh, ta có tích phân $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|dx$ hội tụ. Do vậy tích phân đã cho hội tụ tuyệt đối.

Tích phân của hàm số không bị chặn

Cho hàm $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, không bị chặn trong khoảng $[a, b)$ nhưng bị chặn và khả tích trên mỗi đoạn $[a, b - \eta]$ với $0 < \eta < b - a$. Khi đó nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\eta\to 0}\int_a^{b-\eta} f(x)dx$$

thì giới hạn này gọi là tích phân suy rộng của f trên đoạn $[a, b]$ và ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. trường hợp giới hạn vừa đề cập không tồn tại hoặc bằng vô hạn, ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ là phân kỳ.

Tương tự, xét trường hợp $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ không bị chặn trong $(a, b]$ nhưng bị chặn và khả tích trên mỗi đoạn $[a + \eta, b]$ với $0 < \eta < b - a$. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx$$

thì giới hạn này gọi là tích phân suy rộng của f trên $[a, b]$ và ta nói tích phân $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ hội tụ. Trường hợp ngược lại ta nói tích phân là phân kỳ.

Ví dụ 3.16. Xét tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. Dễ dàng kiểm tra được tích phân này hội tụ khi và chỉ khi $\alpha < 1$.

Tương tự tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\beta}$ chỉ hội tụ khi $\beta < 1$.

Để phân biệt, ta gọi tích phân suy rộng với hàm không bị chặn là tích phân suy rộng loại hai, trong khi tích phân với cận vô hạn gọi là tích phân suy rộng loại một.

Đối với tích phân suy rộng loại hai, ta cũng có tiêu chuẩn so sánh để kiểm tra tính hội tụ.

Định lí 11. Cho hai hàm số f và g xác định trên $[a, b)$, khả tích trên mỗi đoạn $[a, b-\eta], 0 < \eta < b-a$.

1. Giả sử $0 \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [a, b)$. Khi đó

   - Nếu $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ.
   - Nếu $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

2. Giả sử $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a, b)$ và tồn tại giới hạn $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ $(k > 0)$. Khi đó tích phân $\int_a^b f(x)dx$ và $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Tương tự như trong trường hợp tích phân suy rộng loại một, khi $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ thì ta viết $f(x) \sim kg(x)$ khi $x \to b$.

Ví dụ 3.17. Xét sự hội tụ của tích phân $I = \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx$. Với $f(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$, ta có thể viết

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = I_1 + I_2.$$

Ta có $f(x) \sim x^\alpha$ khi $x \to 0$, và tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} x^\alpha dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > -1$ nên I_1 hội tụ khi và chỉ khi $\alpha > -1$. Tương tự $f(x) \sim (1-x)^\beta$ khi $x \to 1$ nên I_2 hội tụ khi và chỉ khi $\beta > -1$. Vậy I hội tụ khi $\alpha > -1, \beta > -1$.

Chú ý rằng trong nhiều trường hợp, ta phải xét tích phân với cận vô hạn đồng thời hàm lấy tích phân không bị chặn.

Ví dụ 3.18. Xét tích phân $I = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-2x}dx$. Nếu $p \geq 1$ thì đây là tích phân suy rộng loại một. Do $f(x) = x^{p-1}e^{-2x}$ thỏa mãn

$$\frac{f(x)}{1+x^2} \to 0 \text{ khi } x \to \infty$$

nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(x) \leq \dfrac{M}{1+x^2}$. Từ đó theo tiêu chuẩn so sánh, tích phân đã cho hội tụ. Trường hợp $p < 1$ thì rõ ràng $f(x)$ không bị chặn ($x = 0$ là điểm bất thường). Khi đó ta viết

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx = I_1 + I_2.$$

Lý luận tương tự như trên, ta có I_2 hội tụ. Với I_1 là tích phân suy rộng loại hai, ta có $f(x) \sim x^{p-1}$ khi $x \to 0$. Do vậy I_1 hội tụ khi và chỉ khi $p - 1 > -1$ hay $p > 0$. Vậy tích phân đã cho hội tụ khi $p > 0$.

3.5 Bài tập

Tích phân bất định

1. Tính các tích phân sau

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin 2x}dx, x \in (0, \frac{\pi}{2})$

   (c) $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}dx$

   (e) $\displaystyle\int x|x|dx$

   (f) $\displaystyle\int (2x-3)|x-2|dx$

2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau bằng phương pháp đổi biến

   (a) $\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$

   (b) $\sqrt{e^{2x}+e^{3x}}$

   (c) $e^{2x^2+2x-1}(2x+1)$

   (d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$ (*chỉ dẫn*: đặt $1+x=t^2$)

   (e) $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$

3. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

   (a) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}dx$

   (b) $\displaystyle\int \arcsin x dx$

   (c) $\displaystyle\int \arctan x dx$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

   (e) $\displaystyle\int \ln x dx$

   (f) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)dx$

4. Tìm công thức truy hồi đối với mỗi tích phân sau

   (a) $I_n=\displaystyle\int x^ne^{ax}dx$

   (b) $I_n=\displaystyle\int \ln^n x dx$

   (c) $I_n=\displaystyle\int \cos^n x dx$

Tích phân xác định

5. Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến

   (a) $\displaystyle\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$

   (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{9-x^2}dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

6. Tích các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \arctan x dx$

   (b) $\displaystyle\int_{1/e}^e |\ln x|dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx$

   (e) $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln x)dx$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x \cdot \arctan(\sin x)dx$

7. Tính tích phân $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$, trong đó

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } 0 \le x \le 1, \\ 2-x & \text{khi } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

8. Chứng minh rằng nếu f liên tục trên đoạn $[-\ell, \ell]$ thì

(a) $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} f(x)dx$ khi f là hàm chẵn.

(b) $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = 0$ khi f là hàm lẻ.

9. Chứng minh rằng với $m, n \in \mathbb{Z}$ ta có các đẳng thức

   (a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0.$

   (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$ nếu $m \neq n$.

   (c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$ nếu $m \neq n$.

10. Chứng minh đẳng thức $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx.$

11. Một vật thể chuyển động thẳng với vận tốc cho bởi hàm $v(t) = t^2 - t$ (t tính theo giây). Tính quãng đường vật thể di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 5$. Tìm khoảng cách vị trí tại thời điểm $t = 0$ và vị trí tại thời điểm $t = 5$.

12. Gọi tốc độ tiêu thụ dầu mỏ trên thế giới tại thời điểm t là $r(t)$, t được tính theo năm bắt đầu từ ngày 1 tháng 1 năm 2000, và $r(t)$ tính theo thùng/năm. Cho biết ý nghĩa của biểu thức $\int_{0}^{3} r(t)dt$.

Ứng dụng của tích phân xác định

13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường đã chỉ ra.

    (a) $y = 6x - x^2, y = 0.$

    (b) $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

    (c) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1.$

    (d) $x = a\cos t, y = b\sin t, t \in [0, 2\pi].$

    (e) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi].$

    (f) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi].$

    (g) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$

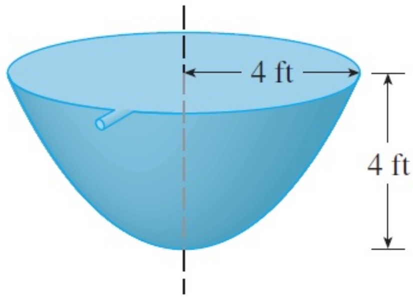
(h) $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

14. Tính thể tích hình nón với bán kính đáy R và chiều cao h.

15. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón $(z-2)^2 = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2}$ và mặt phẳng $z = 0$.

16. Một đài tưởng niệm cao 20m với diện tích thiết diện ngang tại khoảng cách x mét tính từ đỉnh là một tam giác đều có cạnh bằng $x/4$ mét. Tính thể tích của đài tưởng niệm này.

17. Một bể đầy nước có hình paraboloid (hình tạo bởi một parabola xoay xung quanh một trục dọc). Giả sử bể có chiều cao 4ft và bán kính miệng bể bằng 4ft. Tính thể tích nước chứa trong bể.



18. Một cái bát hình nửa mặt cầu với đường kính 30cm. Một quả bóng với đường kính 10cm được đặt trong bát. Sau đó người ta đổ nước vào bát cho đến khi chiều sâu của nước là h cm. Tính thể tích nước có trong bát.

19. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi việc xoay hình phẳng D quanh một trục:

    (a) $D : y^2 \le 2px, x \le a$, xung quanh trục Ox.

    (b) $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $b < a$, xung quanh trục Oy.

    (c) $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $b < a$, xung quanh trục Ox.

    (d) $D : x^2 + y^2 \le 1, x + y \ge 1$, xung quanh trục Ox.

    (e) $D : y \le \sin x, y \ge 0, 0 \le x \le \pi$, xung quanh trục Ox.

20. Tính độ dài đường cong:

(a) $y = x^2 - 1$, $-1 \le x \le 1$.

(b) $y = \ln \cos x$, $0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}$.

(c) $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

(d) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$.

(e) $\rho = ae^{k\theta}, 0 \le \theta \le T$ (đường xoắn ốc lôga).

(f) $\rho = a(1 - \cos\varphi), a > 0, 0 \le \varphi \le 2\pi$ (đường hình tim).

21. Tính diện tích mặt tròn xoay thu được khi quay đường cong quanh một trục:

(a) $y = x^3, -2/3 \le x \le 2/3$, xung quanh trục Ox.

(b) $y = \sin x, 0 \le x \le \pi$, xung quanh trục Ox.

(c) $y^2 = 4x, 0 \le x \le 3$, xung quanh trục Ox.

Tích phân suy rộng

22. Tính các tích phân suy rộng sau đây:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty x \sin x dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

23. Khảo sát sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau đây:

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$

(b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 3x dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x - \cos 5x}{x^2} dx$

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2} dx$

(g) $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1} dx$

24. Tính các tích phân suy rộng sau:

(a) $\displaystyle\int_2^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

(c) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{dx}{x \ln x}$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} x \ln x dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{1/x} dx}{x^3}$

25. Xét sự hội tụ của các tích phân suy rộng sau đây:

(a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1} dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x}-1}$

(e) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$

Đáp số hoặc chỉ dẫn

Tích phân bất định

1. (a) $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{1+e^x} = \ln(1+e^x) + C.$

   (b) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin 2x}dx = \sin x - \cos x + C.$

   (c) $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)dx = \sin e^x + C.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^2 x} + C.$

   (e) $\displaystyle\int x|x|dx = \frac{1}{3}|x|^3 + C.$

   (f) $\displaystyle\int (2x-3)|x-2|dx = \begin{cases} -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + C, & x < 2 \\ \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x + C, & x \geq 2. \end{cases}$

2. (a) Đáp số: $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}.$

   (b) Đáp số: $\displaystyle\frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}}.$

   (c) Đáp số: $\displaystyle\frac{1}{2}e^{2x^2+2x-1}.$

   (d) Đáp số: $2(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1}))$. *Chỉ dẫn*: đặt $1+x=t^2$.

   (e) Đáp số: $\tan(\arcsin x)$. *Chỉ dẫn*: đặt $x = \sin t$.

3. (a) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2} + C.$

   (b) $\displaystyle\int \arcsin x dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

   (c) $\displaystyle\int \arctan x dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C.$

   (e) $\displaystyle\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C.$

(f) $\displaystyle\int x^2\ln(1+x)dx = \frac{1}{2}(x^3+1)\ln(x+1) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + C.$

4. (a) $I_n = \dfrac{1}{a}x^n e^{ax} - \dfrac{n}{a}I_{n-1}.$

   (b) $I_n = x\ln^n x - nI_{n-1}.$

   (c) $I_n = \dfrac{1}{n}\sin x\cos^{n-1}x + \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}.$

Tích phân xác định

5. (a) $\displaystyle\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = 4.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = \frac{1}{2}(4-\pi)$.

   (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}dx = \frac{4}{5}(2\sqrt[4]{2}-1).$ *Chỉ dẫn*: đặt $t = \ln x + 1$.

   (d) $\displaystyle\int_{-3}^{\sqrt{3}} x^2\sqrt{9-x^2}dx = \frac{81\pi}{8}.$ *Chỉ dẫn*: đặt $x = 3\cos t$.

   (e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$ *Chỉ dẫn*: đặt $x = 2\sin t$.

6. (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\arctan x dx = \frac{1}{6}.$

   (b) $\displaystyle\int_{1/e}^e |\ln x|dx = 2(1-e^{-1}).$

   (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin x dx = \frac{1}{2}(e^\pi+1).$

   (d) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\ln(1+e^x)dx = -\frac{1+e}{e}\ln(1+e) + 2\ln 2 + 1.$

   (e) $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln x)dx = \sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + \frac{1}{2}.$

   (f) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin 2x\cdot\arctan(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} - 1.$ *Chỉ dẫn*: đặt $u = \arctan(\sin x)$ và $dv = \sin 2x dx = (\sin^2 x)'dx$.

7. Đáp số: $\frac{5}{6}$. *Chỉ dẫn*: $\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (2-x)dx$.

8. (a) *Chỉ dẫn*: $\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \int_{-\ell}^{0} f(x)dx + \int_0^{\ell} f(x)dx$. Trong tích phân thứ nhất, dùng phép đổi biến $t = -x$, đưa về tích phân $\int_0^{\ell} f(t)dt$, nhờ sử dụng tính chất $f(-t) = f(t)$.

   (b) *Chỉ dẫn*: làm tương tự như trường hợp (a), tích phân thứ nhất chuyển thành $-\int_0^{\ell} f(t)dt$, nhờ sử dụng tính chất $f(-t) = -f(t)$.

9. (a) *Chỉ dẫn*: hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ nên có thể áp dụng kết quả bài 8.

   (b) *Chỉ dẫn*: sử dụng công thức $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$.

   (c) *Chỉ dẫn*: sử dụng công thức $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$.

10. *Chỉ dẫn*: đổi biến $t = \frac{\pi}{2} - x$.

11. Quãng đường vật thể di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 5$ bằng $\int_0^5 |v(t)|dt$. Khoảng cách vị trí tại thời điểm $t = 0$ và vị trí tại thời điểm $t = 5$ bằng $\left|\int_0^5 v(t)dt\right|$.

12. Biểu thức $\int_0^3 r(t)dt$ chính là lượng dầu tiêu thụ từ 1/1/2000 đến 31/12/2003.

Ứng dụng của tích phân xác định

13. (a) $S = \int_0^6 |6x - x^2|dx = 36$.

    (b) $S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4|dx = 9$.

(c) $S = \int_0^1 |e^x - e^{-x}|dx = \dfrac{(e-1)^2}{e}$.

(d) $S = \int_0^{2\pi} ab\sin^2 t dt = \pi ab$.

(e) $S = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2$.

(f) $S = \int_0^{2\pi} a^2\cos^2 t\sin^4 t dx = \dfrac{3\pi a^2}{8}$.

(g) $S = \dfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2$. *Chỉ dẫn*: chú ý $\cos 2\varphi \geq 0$ nên $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

(h) $S = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \dfrac{3}{2}\pi a^2$.

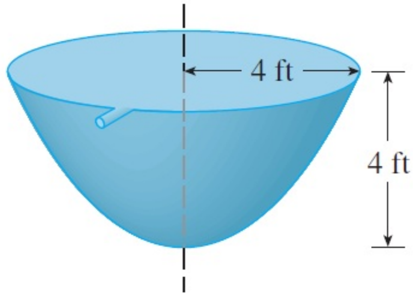
14. Đưa vào hệ tọa độ sao cho đỉnh hình nón nằm ở gốc tọa độ, trục của nó là trục Ox. Khi đó thiết diện của hình nón cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là hình tròn với bán kính r, và ta có $\dfrac{x}{h} = \dfrac{r}{R}$. Hay $r = \dfrac{Rx}{h}$. Diện tích thiết diện là $A(x) = \pi\dfrac{R^2x^2}{h^2}$. Thể tích hinhd nón bằng $\int_0^h A(x)dx = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

15. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Oz chính là ellipse $\dfrac{x^2}{3(z-2)^2} + \dfrac{y^2}{2(z-2)^2} = 1$ với hai bán trục $a = \sqrt{3}(z-2)$ và $b = \sqrt{2}(z-2)$. Diện tích thiết diện là $A(z) = \pi\sqrt{6}(z-2)^2$. Do đó thể tích hình nón là $\int_0^2 A(z)dz = \dfrac{8\pi\sqrt{6}}{3}$.

16. Đưa vào hệ toạ độ có gốc trùng với đỉnh của đài tưởng niệm và trục Ox là trục đứng hướng xuống dưới. Khi đó diện tích thiết diện là $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{x}{4}\right)^2$. Thể tích của đài tưởng niệm bằng $\int_0^{20} A(x)dx = \dfrac{125\sqrt{3}}{3}$ (m^3).

17. Đưa vào hệ tọa độ với gốc trùng với đỉnh của parabola và trục Oz là trục đứng. Giả sử parabola có phương trình $z = ax^2$ Khi đó theo giả thiết ta có $a = \dfrac{1}{4}$. Do vậy diện tích thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với

Oz là hình tròn bán kính $x = 2\sqrt{z}$ (ft). Từ đó diện tích thiết diện là $A(z) = 4\pi z$ (ft^2) và thể tích của bể bằng $\int_0^4 A(z)dz = 32\pi$ (ft^3).



18. Trước tiên ta đặt vấn đề tính thể tích phần chóp cầu bán kính R với chiều cao là h. Đưa vào hệ tọa độ sao cho gốc trùng với đỉnh của chóp cầu, tâm hình cầu nằm trên trục Ox. Khi đó chóp cầu là hình tròn xoay tạo bởi phần đường tròn $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ với $0 \le x \le h$ xoay quanh Ox. Diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox là $\pi y^2 = \pi[R^2 - (x-R)^2]$ và thể tích chóp cầu cho bởi $V(R) = \int_0^h \pi[R^2-(x-R)^2]dx = \pi R^2 h + \frac{\pi}{3}(R-h)^3 - \frac{\pi}{3}R^3$. Khi đó thể tích nước trong bát bằng $V(15) - V(5)$ (cm^3).

19. (a) Đáp số: πpa^2.
    (b) Đáp số: $\frac{4\pi}{3}a^2b$.
    (c) Đáp số: $\frac{4\pi}{3}ab^2$.
    (d) Đáp số: $\frac{\pi}{3}$.
    (e) Đáp số: $\frac{\pi^2}{2}$.

20. (a) Đáp số: $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})$.
    (b) Đáp số: $\frac{1}{2}\ln 3$.
    (c) Đáp số: $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$.
    (d) Đáp số: $8a$.

(e) Đáp số: $\dfrac{a}{k}\sqrt{1+k^2}(e^{kT}-1)$.

(f) Đáp số: $8a$.

21. (a) Đáp số: $\dfrac{196\pi}{729}$.

(b) Đáp số: $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

(c) Đáp số: $\dfrac{56\pi}{3}$.

Tích phân suy rộng

22. (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{6}$.

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\sin x dx$ phân kỳ.

(d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}$.

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

23. (a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}dx$ hội tụ. Sử dụng dấu hiệu so sánh: $f(x)\le e^{-x}$ với $x\in[1,\infty)$.

(b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^4+1}}$ phân kỳ. Ta có $f(x)\sim 1$ khi $x\to\infty$.

(c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 3xdx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ hội tụ tuyệt đối. Ta có $|f(x)|\le \dfrac{1}{x^{4/3}}$ với mọi $x\ge 1$

(d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ hội tụ với $\alpha>0$. Ta có $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$ khi $x\to\infty$. Do đó $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$.

(e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x-\cos 5x}{x^2}dx$ hội tụ tuyệt đối. Ta có $|f(x)|\le\dfrac{1}{x^2}$ với mọi $x\ge 1$.

(f) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1+2\sqrt{x}+x^2}dx$ hội tụ. Ta có $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}}$ khi $x \to \infty$.

(g) $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{\ln(x-2)}{x^5+x^2+1}dx$ hội tụ. Ta có $\ln(x-2) \leq x$ với $x \geq 5$. Do đó $f(x) \leq g(x) = \dfrac{x}{x^5+x^2+1}$ với $x \geq 5$. Rõ ràng $g(x) \sim \dfrac{1}{x^4}$ khi $x \to \infty$ nên tích phân $\displaystyle\int_5^{\infty} g(x)dx$ hội tụ.

24. (a) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = 6\sqrt[3]{2}$. *Chỉ dẫn*: tách thành tổng hai tích phân $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx$.

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 6$.

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$ phân kỳ.

(d) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x dx = -\frac{1}{4}$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}dx}{x^3}$ phân kỳ.

25. (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ hội tụ. Ta có $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{(1-x)^{1/3}}$.

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{e^{\sin x}-1}dx$ hội tụ. Ta có $f(x) \sim \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin x} \sim \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$ khi $x \to 0$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ hội tụ. Ta có $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to 0$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{e^{\sin x}-1}$ hội tụ. Ta có $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ khi $x \to 0$.

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ tuyệt đối. Ta có $\sqrt[4]{x}\ln x \to 0$ khi $x \to 0$ nên $|f(x)| = \dfrac{|\sqrt[4]{x}\ln x|}{x^{3/4}} \leq \dfrac{C}{x^{3/4}}$ với $C > 0$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Khuê, Phạm Ngọc Thao, Lê Mậu Hải, Nguyễn Đình Sang, Toán cao cấp - Tập 1 (A1) Giải tích một biến, NXB Giáo dục, 1997.

[2] James Stewart, Calculus, 7th edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2012.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Toán học cao cấp, tập 1,2,3, NXB Giáo dục 2006.

[4] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Bài tập Toán cao cấp, tập 1,2,3, NXB Giáo dục 2006.

[5] Y.Y. Liasko, A.C. Boiatruc, I.A.G. Gai, G.P. Golobac, Giải tích toán học, các ví dụ và các bài toán (tập 1, 2), NXB Đại học và THCN, 1978.