CHƯƠNG 5

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Mở đầu

Lịch sử lý thuyết phương trình vi phân khởi nguồn từ nửa cuối thế kỉ XVII trong các công trình của Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz hay nhà Bernoulli, Jakob và Johann. Các phương trình vi phân xuất hiện như một hệ quả tự nhiên khi các nhà toán học áp dụng các ý tưởng mới trong giải tích vào một số bài toán trong cơ học. Trải qua lịch sử hơn 300 năm, lý thuyết phương trình vi phân đã trở thành một công cụ đặc biệt trong việc mô tả và phân tích nhiều bài toán thực tiễn không chỉ trong khoa học kỹ thuật mà trong nhiều lĩnh vực khác nhau như trong y học, sinh thái học, kinh tế, môi trường v.v. Tầm quan trọng của chúng là động lực thúc đẩy các nhà khoa học và toán học phát triển các phương pháp trong nghiên cứu các tính chất nghiệm, từ các phương pháp tìm nghiệm chính xác qua các hàm sơ cấp đến các phương pháp hiện đại của giải tích và xấp xỉ số. Hơn nữa, lý thuyết này cũng đóng một vai trò trung tâm trong sự phát triển của toán học bởi những câu hỏi và vấn đề về phương trình vi phân là khởi nguồn của nhiều lĩnh vực toán học như topo, đại số, hình học và giải tích hiện đại [4].

Sự phát triển nhanh chóng của lý thuyết phương trình vi phân và những ứng dụng của chúng trong nhiều ngành khoa học đã và đang thu hút sự quan tâm nghiên cứu của các chuyên gia và người học trong các lĩnh vực đa ngành. Điều này đã đặt lý thuyết phương trình vi phân ở vị trí đặc biệt trong toán học và khoa học ứng dụng. Ngày nay, lý thuyết này được dạy ở nhiều cấp độ khác nhau trong hầu hết các trường đại học và viện nghiên cứu trên thế giới [2].

Chương này giới thiệu một cách sơ lược về lý thuyết phương trình vi phân. Nội dung được trình bày ở đây phù hợp với người đọc đã được trang bị những kiến thức cơ sở về giải tích cổ điển (calculus) và đại số tuyến tính (lý thuyết ma trận). Với mức độ "nhập môn", bài giảng hướng trọng tâm vào cấu trúc tuyến tính và các tính chất nghiệm của những lớp phương trình này.

Nội dung của bài giảng được chia làm 4 phần.

Phần 1 giới thiệu khái quát về phương trình vi phân. Một số khái niệm cơ bản được giới thiệu thông qua các mô hình thực tiễn để người đọc tiếp cận một cách tự nhiên. Phần giới thiệu tổng quát và chính xác sẽ được trình bày trong các mục sau. Phần 2 trình bày phương pháp giải lớp phương trình vi phân cấp 1 và một số mở rộng. Phần 3 giới thiệu các kết quả cơ bản về phương trình vi phân tuyến tính cấp cao. Phần đầu chương là các kết quả tổng quát về cấu trúc và các tính chất nghiệm. Phần tiếp theo là bài thực hành giải các phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng số. Phần 4 giới thiệu sơ bộ về lý hệ phương trình vi phân tuyến tính và phương pháp giải hệ phương trình vi phân tuyến tính với ma trận hằng số trong không gian hai chiều. Cuối mỗi mục là một số bài tập thực hành và hướng dẫn, lời giải vắn tắt.

5.1. Một số ví dụ và mô hình toán học

Trong thực tiễn, các đại lượng đo như vị trí, nhiệt độ, dân số của quần thể, mức độ hấp thụ/chuyển hóa (trong các phản ứng hóa học) v.v thường được mô tả như những hàm của thời gian. Thông thường, các định luật khoa học về các đại lượng đó được diễn tả bằng các phương trình liên quan đến *tốc độ biến đổi* theo thời gian. Các định luật như vậy đều dẫn đến các phương trình vi phân. Dưới đây ta xét một số ví dụ.

Ví dụ 5.1. (Định luật Newton về tỏa nhiệt/hấp thụ nhiệt) Một vật được đặt trong một môi trường được duy trì ở nhiệt độ T_a. Định luật Newton nói rằng *tốc độ biến đổi của nhiệt độ $T(t)$ của vật tỉ lệ với độ chênh nhiệt giữa vật đó với môi trường.* Luật Newton được diễn tả bằng phương trình

$$T'(t) = r\,(T(t) - T_a) \tag{5.1.1}$$

ở đó r là hệ số tỉ lệ. Phương trình (5.1.1) chứa *hàm ẩn* $T(t)$ và đạo hàm $T'(t)$. Đây là một *phương trình vi phân cấp 1*.

Giả sử r là một hằng số. Khi đó (5.1.1) là một *phương trình vi phân tuyến tính*. Hơn nữa, giả sử tại thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, nhiệt độ của vật là T_0. Khi đó, (5.1.1) cho *nghiệm*

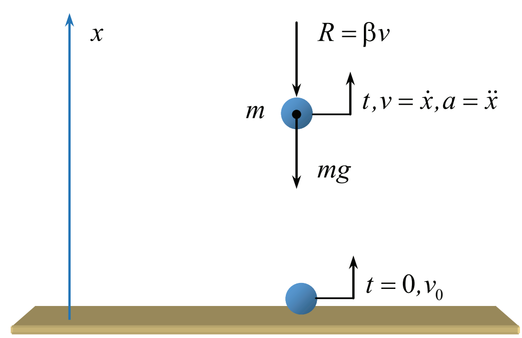
$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{rt}. \tag{5.1.2}$$

Trong thực tế, hệ số tỉ lệ r phụ thuộc cả vào thời gian và độ chênh nhiệt độ $T(t) - T_a$. Tức là, $r = r(t, T(t) - T_a)$. Khi đó, phương trình (5.1.1) trở thành một phương trình vi phân *phi tuyến* cấp 1. Việc tìm nghiệm chính xác $T(t)$

bây giờ trở nên khó khăn hơn, thậm chí “không thể”. Vì vậy, các phương pháp định tính (nghiên cứu tính chất nghiệm) được phát triển để phân tích dáng điệu của nghiệm các phương trình có cấu trúc phức tạp nảy sinh từ các mô hình thực tiễn.

Áp dụng: Một vật tỏa nhiệt vào không khí có nhiệt độ duy trì ở 20°C. Vật đó giảm từ 100°C xuống 60°C sau 20 phút. Sau bao lâu nữa thì nhiệt độ của vật còn 30°C nếu coi tốc độ tỏa nhiệt không đổi? (Đáp số: khoảng 40 phút)

Ví dụ 5.2. (Chuyển động của chất điểm-Motion of a particle) Một vật khối lượng m được bắn lên theo phương đứng với vận tốc ban đầu ($t_0 = 0$) v_0 (Hình 5.1). Giả thiết lực cản trung bình của môi trường tỉ lệ thuận với vận tốc (medium resistance $R = \beta v$). Xác định độ cao cực đại của vật?



Hình 5.1: Chuyển động phương đứng của chất điểm

Tại thời điểm t, lực tác dụng lên vật m gồm trọng lực (gravity) mg và lực cản trung bình (resisting force) $R = \beta v$. Vận tốc $v = x'$, gia tốc $a = v' = x''$. Theo định luật II Newton

$$m\frac{dv}{dt} = -R - mg, \quad R = \beta v. \tag{5.1.3}$$

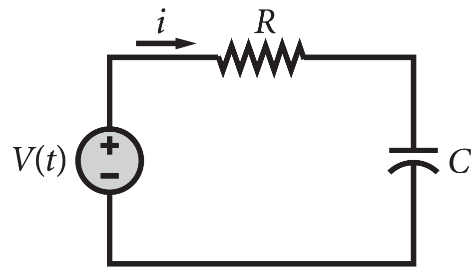
Phương trình (5.1.3) có thể viết dưới dạng *tuyến tính*

$$v' + \frac{\beta}{m}v = -g, \; v(0) = v_0. \tag{5.1.4}$$

Khi đạt độ cao cực đại $v = 0$ và từ (5.1.4) ta được (xem mục Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1)

$$t_{\max} = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{\beta v_0}{mg} + 1\right), \quad x_{\max} = \frac{m^2 g}{\beta^2}\left[\frac{\beta v_0}{mg} - \ln\left(\frac{\beta v_0}{mg} + 1\right)\right].$$

Ví dụ 5.3. (Mạch RC) Xét một mạch điện gồm một nguồn hiệu điện thế $V(t)$, một điện trở R và một tụ có điện dung C. Một ví dụ đơn giản về các ứng dụng thực tiễn của mô hình này là các thiết bị cầm tay (smart phone chẳng hạn), ở đó $V(t)$ là nguồn (charge), C mô tả thiết bị lưu (pin) và R đặc trưng sự tiêu thụ điện năng của thiết bị. Xác định hiệu điện thế v_c qua tụ?



Hình 5.2: Mạch RC

Điện dung C là hệ số đặc trưng độ lệch của cường độ dòng điện khi qua tụ nên ta có

$$i(t) = C\frac{dv_C}{dt}.$$

Mặt khác, theo định luật Omh và định luật Kirchhoff (về hiệu điện thế),

$$V(t) = i(t)R + v_C(t).$$

Do đó, hiệu điện thế $v_C(t)$ được cho bởi *phương trình vi phân tuyến tính cấp 1*

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V(t). \tag{5.1.5}$$

Một số trường hợp đặc biệt

a) *Không có nguồn vào* (zero-input) $V(t) = 0$: Giả sử tại $t = 0$, $v_C(0) = v_0$. Nghiệm của (5.1.5) cho bởi $v_C(t) = v_0 e^{-t/RC}$. Nghiệm này hội tụ về 0 theo hàm mũ (nếu không charge thì sử dụng một thời gian pin sẽ giải phóng hết).

b) *Nguồn không đổi*: $V(t) = K$. Khi đó phương trình (5.1.5) có *điểm cân bằng* (nghiệm dừng) $v_C = K$. Các nghiệm khác của (5.1.5) được cho bởi

$$v_C(t) = v_0 e^{-t/RC} + K\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

Các nghiệm này hội tụ về điểm cân bằng $v_C = K$ theo cấp mũ.

c) *Nguồn kiểu "bật-tắt"* (on-off voltage): Chẳng hạn nguồn được duy trì là hằng số $V(t) = K$ trong khoảng thời gian $[0, t_f]$ rồi tắt ($V(t) = 0$). Khi đó nghiệm của (5.1.5) được cho bởi

$$v_C(t) = \begin{cases} v_0 e^{-t/RC} + K\left(1 - e^{-t/RC}\right), \ 0 \le t \le t_f, \\ v_C(t_f) e^{-\frac{t-t_f}{RC}}, \ t \ge t_f. \end{cases}$$

Các nghiệm này dẫn đến giá trị $v_c = K$ trong khoảng $[0, t_f]$ rồi hội tụ đến 0 theo cấp mũ do không có "nguồn nuôi" $V(t)$.

d) *Nguồn "bật-tắt" tuần hoàn*: Giả sử $V(t) = K$ và lại tắt $V(t) = 0$ một cách tuần hoàn sau những khoảng thời gian $T > 0$. Câu hỏi đặt ra là liệu các nghiệm tương ứng của (5.1.5) có tính tuần hoàn không? Có hội tụ đến giá trị $v_C = K$ hay $v_C = 0$? Những câu hỏi thú vị và quan trọng với các ứng dụng thực tiễn này đặt ra các nghiên cứu định tính (phân tích dáng điệu của nghiệm) cho lớp phương trình (5.1.5) nói riêng và lý thuyết phương trình vi phân nói chung.

Ví dụ 5.4. (Mô hình tăng trưởng dân số một loài)

a) *Mô hình Malthus*: Mô hình tăng trưởng dân số (của quần thể), dạng đơn sơ nhất, dựa trên giả thiết rằng *tốc độ tăng trưởng dân số của quần thể tỉ lệ với dân số hiện tại*. Các yếu tố khác như giới hạn sức chứa của môi trường, nguồn tài nguyên, dịch bệnh v.v không ảnh hưởng gì đến tốc độ này. Gọi $p(t)$ là dân số (hoặc mật độ dân số) tại thời điểm t. Khi đó $p(t)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t), \tag{5.1.6}$$

ở đó r là hệ số tỉ lệ được đặc trưng bởi hệ số sinh r_b và hệ số suy giảm r_d, $r = r_b - r_d$. Với r là hằng số, (5.1.6) là một *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất*. Nghiệm của (5.1.6) khi đó được cho bởi $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$, ở đó p_0 là dân số tại thời điểm ban đầu t_0. Khi $r > 0$, $p(t) \to \infty$ khi $t \to \infty$ ("bùng nổ" dân số). Khi $r < 0$, $p(t) \to 0$ theo cấp mũ (suy giảm dân số đến tuyệt chủng). Trong thực tế, hệ số r phụ thuộc nhiều yếu tố, chẳng hạn $r = r(t, p)$. Phương trình (5.1.6) khi đó trở thành *phương trình vi phân phi tuyến*

$$p'(t) = r(t, p(t))p(t). \tag{5.1.7}$$

b) *Mô hình tăng trưởng có giới hạn*: Phương trình Logistic.

Ta hiệu chỉnh mô hình (5.1.6) có kể đến ảnh hưởng giới hạn (sức chứa) của môi trường. Giả thiết rằng

- Khi dân số nhỏ ($p(t)$ nhận giá trị bé), tốc độ tăng trưởng dân số tỉ lệ với số dân hiện tại.

- Khi dân số quá lớn so với sức chứa của môi trường, dân số phải giảm (tăng trưởng âm).

Giả sử môi trường có sức chứa (số dân giới hạn) là N. Khi $p(t)$ rất bé so với N thì $p(t)/N$ không đáng kể. Khi đó, tốc độ tăng trưởng theo luật (5.1.6) và xấp xỉ $\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{P}{N}\right)$, $r > 0$. Khi $p > N$ thì $rp\left(1 - \frac{p}{N}\right) < 0$, và do đó dân số suy giảm. Phương trình

$$\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{N}\right) \tag{5.1.8}$$

gọi là phương trình logistic về mô hình tăng trưởng dân số. Đó là một phương trình vi phân phi tuyến cấp 1 dạng *ô-tô-nôm* (autonomous).

c) *Phương trình logistic có yếu tố "đánh bắt", thu hoạch* (harvesting term): Giả sử quần thể một loài (ví dụ cá hồi) sinh trưởng theo luật logistic và bị đánh bắt (thu hoạch) với tốc độ H (số cá thể bị loại khỏi quần thể trên một đơn vị thời gian như ngày/tuần/tháng v.v). Khi đó, sự sinh trưởng của loài được mô tả bởi phương trình vi phân phi tuyến sau đây

$$\frac{dp}{dt} = rp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - H. \tag{5.1.9}$$

Số hạng về tốc độ đánh bắt có thể là hằng, dạng tỉ lệ $H = QEp$ với hằng số Q diễn tả tỉ trọng bắt được (catchability) và E đo nỗ lực thu hoạch (harvesting effort) hay hàm phi tuyến tổng quát $H = H(t, p)$. Để mô tả các quần thể sinh học trong thực tiễn và ứng dụng trong cuộc sống, ngoài các tham số cơ bản như r, N, H, phương trình (5.1.9) còn phụ thuộc rất nhiều tham số khác như đặc tính sinh trưởng (theo mùa chẳng hạn, seasonal growth), yếu tố bảo tồn, nuôi trồng hay dịch bệnh, di cư. Thêm nữa, giả sử một loài nào đó được thu hoạch với mục đích thương mại. Khi đó, hàm H cần phải được tính toán, ước lượng để vừa bảo tồn nguồn lợi tự nhiên mà lại có lợi nhuận (tiền bán) tối đa. Những vấn đề như vậy là một số ví dụ điển hình trong lĩnh vực nghiên cứu về toán sinh thái mà ở đó lý thuyết phương trình vi phân là một công cụ đặc biệt thiết yếu bên cạnh nhiều công cụ toán học khác.

d) *Phương trình logistic có trễ*: Để minh họa, ta tiếp tục phát triển từ mô hình (5.1.9). Thực tế, việc đánh bắt sẽ ảnh hưởng đến tốc độ sinh trưởng của quần thể sau một thời gian nhất định (liên quan đến vòng đời từ lúc cá thể sinh ra đến khi trưởng thành). Khi đó, mô hình (5.1.9) trở thành

$$\frac{dp(t)}{dt} = rp(t)\left(1 - \frac{p(t-\tau)}{N}\right) - H(t, p(t)) \tag{5.1.10}$$

ở đó $\tau > 0$ diễn tả thời gian "trễ" (delay) của mô hình. Phương trình (5.1.10) thuộc lớp *phương trình vi phân có trễ* mà việc nghiên cứu định tính và định lượng lớp phương trình đó nằm ngoài khuôn khổ chương trình bậc đại học.

Các ví dụ trên được mô tả bởi các phương trình vi phân cấp 1 (5.1.1)-(5.1.10). Một số ví dụ tiếp theo để minh họa việc mô tả các mô hình thực tiễn trong khoa học bởi hệ phương trình vi phân.

Ví dụ 5.5. (Mô hình thú-mồi, predator-prey model) Trong ví dụ này ta xét mô hình một quần thể hai loài gồm: Loài mồi, kí hiệu bởi R (rabbits) và loài thú F (foxes). Giả sử rằng

- Khi không có thú, loài mồi tăng trưởng không giới hạn (luật Malthus).
- Thú ăn mồi và tốc độ mồi bị ăn thịt tỉ lệ với tốc độ thú và mồi gặp nhau.
- Không có loài mồi, loài thú suy giảm tỉ lệ với dân số hiện tại.
- Tốc độ sinh trưởng loài thú tỉ lệ với lượng mồi bị ăn thịt.

Kí hiệu α là hệ số tăng trưởng của mồi, β là hệ số tỉ lệ xác định lượng thú và mồi gặp nhau và mồi bị ăn thịt, γ hệ số suy giảm của loài thú và δ là hệ số tỉ lệ xác định độ tăng trưởng của thú khi một con mồi bị ăn thịt. Các hệ số này được giả thiết là các hằng số dương. Khi đó, sự sinh trưởng của quần thể được đặc trưng bởi hệ sau

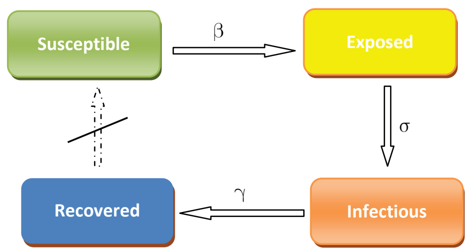
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}R = (\alpha - \beta F)R \\ \frac{d}{dt}F = -(\gamma - \delta R)F. \end{cases} \tag{5.1.11}$$

Hệ (5.1.11) chứa các hàm ẩn F, R và các đạo hàm cấp 1 của chúng. Đó là một *hệ phương trình vi phân phi tuyến cấp 1.*

Kí hiệu hàm giá trị vectơ (hai chiều) $S : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ bởi $S(t) = \begin{bmatrix} R(t) \\ F(t) \end{bmatrix}$ và $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(S) = \begin{bmatrix} (\alpha - \beta F)R \\ -(\gamma - \delta R)F \end{bmatrix}$. Quy ước rằng đạo hàm của $S(t)$ cho bởi $S'(t) = \begin{bmatrix} R'(t) \\ F'(t) \end{bmatrix}$. Khi đó, hệ phương trình vi phân (5.1.11) được viết dưới dạng phương trình vi phân trong không gian hai chiều sau đây

$$S' = \mathcal{F}(S). \tag{5.1.12}$$

Ví dụ 5.6. (Mô hình dịch tễ SEIR-epidemic model) Để mô tả sự lây lan của dịch bệnh trong một quần thể (cộng đồng dân cư), ta có thể sử dụng các mô hình dịch tễ (epidemic models) diễn tả bởi hệ các phương trình vi phân. Hình 5.6 minh họa mô hình SEIR (Susceptible-Exposed-Infectious-Recovered).



Hình 5.3: Mô hình dịch tễ SEIR

Ta chia dân số thành 4 nhóm gồm: Nhóm các cá thể khỏe mạnh có nguy cơ nhiễm bệnh S, nhóm các cá thể đã phơi nhiễm E (tiếp xúc gần hay có dấu hiệu dịch tễ), nhóm nhiễm bệnh I và nhóm hồi phục R (hoặc bị loại khỏi cộng đồng). Kí hiệu β là tốc độ nhiễm bệnh, σ là tốc độ biến đổi nhóm ủ bệnh (thời gian ủ bệnh trung bình $\frac{1}{\sigma}$), $\gamma = 1/D$ là tốc độ hồi phục (xác định bởi thời gian nhiễm bệnh trung bình D). Giả sử quần thể cô lập và $N = S + E + I + R$ không đổi (trong thời gian lây lan bệnh dịch). Khi đó, sự biến đổi các nhóm cá thể trong quần thể được tả bởi *hệ phương trình vi phân phi tuyến sau đây*

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I. \end{cases} \tag{5.1.13}$$

Việc nghiên cứu các *điểm cân bằng* và dáng điệu nghiệm của các mô hình dịch tễ khi thời gian đủ lớn có ý nghĩa quan trọng trong việc dự báo diễn biến dịch bệnh. Chẳng hạn, loại dịch bệnh đó có biến mất ($I(t) \to 0$) hay thành đại dịch (pandemic)? Tính chất tuần hoàn (quay lại sau một thời gian kiểu cúm mùa) hay việc kiểm soát (điều khiển) ảnh hưởng và hiệu quả ra sao đối với sự phát triển và lây lan của bệnh là những vấn đề có ý nghĩa thực tiễn. Đặc biệt, việc ước lượng được hệ số tái tạo cơ bản (basic reproduction number) R_0 cho nhiều thông tin quan trọng về mức độ lây lan của dịch bệnh ($R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ với mô hình đơn giản (5.1.13)). Thông thường, $R_0 < 1$ thì dịch bệnh đó được kiểm soát với quy mô nhỏ.

Ví dụ 5.7. (Phản ứng hóa học)

a) *Phản ứng thuận nghịch đơn chất*: Xét mô hình phản ứng $A \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} B$, ở đó A, B là các chất phản ứng và k_+, k_- là các hằng số về hiệu suất phản ứng (rate constants). Kí hiệu $[A]$, $[B]$ là nồng độ (concentration) mole/l của A và B. Theo định luật bảo toàn khối lượng, nồng độ các chất trong phản ứng được mô tả bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[A] = k_-[B] - k_+[A] \\ \frac{d}{dt}[B] = k_+[A] - k_-[B]. \end{cases} \tag{5.1.14}$$

b) *Phản ứng cơ bản hai chất*: Xét phản ứng $A + B \xrightarrow{k} C$, ở đó hai đơn chất A, B tương tác tạo ra sản phẩm C. Định luật bảo toàn khối lượng phát biểu rằng tốc độ biến đổi nồng độ sản phẩm $[C]$ tỉ lệ với tích nồng độ các chất phản ứng. Do đó, tốc độ tạo thành của $[C]$ được mô tả bởi phương trình

$$\frac{d}{dt}[C] = k[A][B]. \tag{5.1.15}$$

Áp dụng phương trình (5.1.15) cho phản ứng $A + B \underset{k_-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} B + B$. Giả sử nồng độ $[A]$ cố định (cung cấp liên tục với tốc độ không đổi), khi đó nồng độ sản phẩm $[B]$ được cho bởi phương trình vi phân phi tuyến (phương trình Ricatti) sau đây

$$\frac{d}{dt}[B] = k_+[A][B] - k_-[B]^2. \tag{5.1.16}$$

c) *Phản ứng phức hợp* (Mô hình Brusselator): Xét một mô hình phản ứng hóa học dạng sau

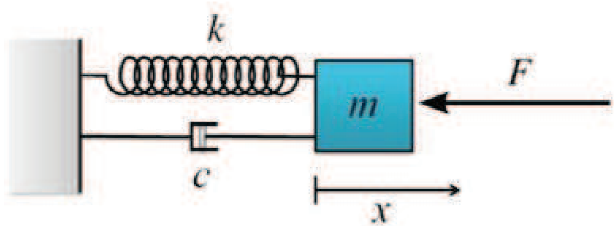
$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{k_1} X \\ B + X &\xrightarrow{k_2} Y + D \\ 2X + Y &\xrightarrow{k_3} 3X \\ X &\xrightarrow{k_4} E \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

ở đó A, B, D, E, X và Y là các đơn chất, k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ là các hiệu suất phản ứng. Giả sử rằng, nguồn cung các chất phản ứng A và B không giới hạn. Khi đó, tốc độ biến đổi nồng độ hợp chất X và Y được cho bởi hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1[A] - k_2[B] + k_3x^2y - k_4x \\ \frac{dy}{dt} = k_2[B]x - k_3x^2y \end{cases} \tag{5.1.18}$$

ở đó $x = [X]$ và $y = [Y]$. Phản ứng (5.1.17) được mô tả dưới dạng phương trình toán học bởi hệ phương trình vi phân (5.1.18).

Ví dụ 5.8. (Mô hình dao động cơ học Mass-spring-damper) Xét một cơ hệ như Hình 5.4 dưới đây. Một vật khối lượng m được gắn với một lò xo có độ cứng (stiffness) k và c là hệ số nén của chất lỏng (damper). Gọi $x(t)$ là độ lệch (displacement) của vật m tại thời điểm t.



Hình 5.4: Mô hình mass-spring-damper

Theo định luật Hook, lực đàn hồi $F_s = -kx$, lực nén (damping force) $F_d = -c\frac{dx}{dt} = -cx'$. Do đó, lực tổng hợp tác động trên vật m tại thời điểm t là

$$F = F_s + F_d + f = -cx' - kx + f_{ext},$$

ở đó f_{ext} là ngoại lực tác dụng trên cơ hệ. Mặt khác, theo định luật II Newton, $F = ma = mx''$. Từ đó ta có phương trình chuyển động của vật m

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f_{ext}. \tag{5.1.19}$$

Phương trình (5.1.19) là một *phương trình vi phân tuyến tính* cấp 2 *không thuần nhất*. Với $f_{ext} = 0$, phương trình (5.1.19) trở thành phương trình vi phân tuyến tính *thuần nhất*.

Kí hiệu tần số $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ và tỉ suất nén $\zeta_0 = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, phương trình (5.1.19) được viết dạng *phương trình dao động* cưỡng bức

$$x'' + 2\zeta_0\omega x' + \omega^2 x = \frac{1}{m}f_{ext}. \tag{5.1.20}$$

Trường hợp đặc biệt của (5.1.20), giả sử $f_{ext} = 0$ (bỏ qua mọi lực cản) và $c = 0$ (không có damper), phương trình (5.1.20) trở thành

$$x'' + \omega^2 x = 0. \tag{5.1.21}$$

Phương trình (5.1.21) là một phương trình quen thuộc mô tả trạng thái của một *dao động điều hòa* với nghiệm bất kì (xem mục phương trình tuyến tính cấp cao)

$$x = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t + \varphi).$$

Bây giờ ta đổi biến $x_1 = x$, $x_2 = x'$ và $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Khi đó, phương trình (5.1.20) được viết dưới dạng một *hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất*

$$X'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\zeta_0\omega \end{bmatrix}}_{A} X(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} f_{ext}(t). \tag{5.1.22}$$

Ngoại lực f_{ext} trong thực tiễn kĩ thuật được sử dụng như tín hiệu điều khiển hệ thống. Khi đó, (5.1.22) mô tả một mô hình hệ điều khiển tuyến tính với vectơ trạng thái $X(t)$ và điều khiển (control) $u(t) = f_{ext}(t)$.

5.2. Khái niệm về phương trình vi phân

Phương trình vi phân là một phương trình chứa hàm ẩn, gọi là $x(t)$, các đạo hàm của $x(t)$ và biến thời gian t. Ta gọi cấp của một phương trình vi phân là *cấp cao nhất* của đạo hàm hàm ẩn xuất hiện trong phương trình. Ví dụ, phương trình vi phân cấp 1 $x' = -rx$, $p' = kp(1 - p/N)$, $x = \phi(x')t + \psi(x')$; phương trình vi phân cấp 2 $x'' = -\omega^2 x$, $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ hay phương trình vi phân cấp n

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)). \tag{5.2.1}$$

Trường hợp hàm ẩn $x(t)$ có giá trị vectơ, chẳng hạn $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, phương trình $x'(t) = f(t, x(t))$ trở thành hệ phương trình vi phân (cấp 1). Trong các phương trình vi phân của hàm ẩn $x(t)$, biến t thường được ám chỉ là biến độc lập và x là biến hàm (x là một hàm của thời gian t). Khi viết, thay vì viết giá trị $x(t), x'(t)$, ta có thể viết dạng hàm x, x'. Ví dụ $T' = r(T - T_a)$, $P' = rP(N - P)$ hay $x' = Ax + Bu$. Theo cấu trúc đại số, ta có *phương trình vi* *phân tuyến tính* và *phương trình vi phân phi tuyến*. Ví dụ $x''(t)+\omega^2 x(t) = f(t)$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 trong khi $x' = a+bx+cx^2$ là phương trình vi phân phi tuyến cấp 1 (xem mô tả chi tiết ở các mục sau).

5.2.1. Nghiệm

Một nghiệm của phương trình vi phân là một hàm $x(t)$ xác định trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$ sao cho khi thay $x(t)$ và các đạo hàm $x'(t)$, $x''(t)$ v.v vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Chẳng hạn, $x(t)$ là nghiệm của phương trình $x' = f(t,x)$ trên khoảng I nếu $(t, x(t)) \in D_f$ (miền xác định của hàm f) và $x'(t) = f(t, x(t))$ với mọi $t \in I$. Ví dụ, phương trình vi phân cấp 1

$$x' = f(t), \tag{5.2.2}$$

ở đó $f(t)$ là một hàm liên tục trên khoảng $I \subseteq \mathbb{R}$, có vô hạn nghiệm dạng

$$x(t) = \int f(t)dt + C$$

với $C \in \mathbb{R}$ là một hằng số tùy ý. Ta gọi họ nghiệm đó là *nghiệm tổng quát*. Họ nguyên hàm của hàm liên tục $f(t)$ chính là nghiệm tổng quát của phương trình (5.2.2). Phương trình $x' = \lambda x$, λ là hằng số, có nghiệm tổng quát $x = Ce^{\lambda t}$ trong khi phương trình $x' = \lambda(t)x$ có nghiệm tổng quát $x = Ce^{\int \lambda(t)dt}$. Để cho gọn, ta thường viết $e^{\int \lambda(t)dt} = \exp(\int \lambda(t)dt)$. Một ví dụ khác, phương trình $x' = x^2$ có nghiệm tổng quát $x = \dfrac{1}{C-t}$ xác định trên các khoảng $(-\infty, C)$ và (C, ∞). Ngoài ra, $x = 0$, $t \in (-\infty, \infty)$, cũng là một nghiệm của phương trình và ta gọi là *nghiệm riêng*.

Ví dụ 5.9. Xét phương trình

$$x' = \frac{x}{1+x^2}. \tag{5.2.3}$$

Nghiệm riêng $x = 0$, $t \in (-\infty, \infty)$. Ta tách phương trình về dạng $\dfrac{1+x^2}{x}dx = dt$ và lấy tích phân hai vế ta được

$$\ln|x| + \frac{1}{2}x^2 = t + C$$

là *nghiệm tổng quát dạng ẩn* hay *tích phân tổng quát* của phương trình đã cho.

5.2.2. Bài toán giá trị ban đầu

Mỗi phương trình vi phân thường có vô hạn nghiệm. Để xác định một nghiệm cụ thể, ta cần cho thêm các dữ kiện. Chẳng hạn, với phương trình tỏa nhiệt $T' = r(T - T_a)$, nghiệm tổng quát là $T(t) = T_a + Ce^{rt}$. Giả sử tại thời điểm $t_0 = 0$, ta biết nhiệt độ của vật là $T(0) = T_0$. Khi đó nghiệm duy nhất thỏa mãn *điều kiện ban đầu* $T(0) = T_0$ là $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{rt}$. Giá trị t_0 của biến độc lập gọi là *thời điểm đầu* và giá trị T_0 của biến hàm gọi là *giá trị ban đầu* và điều kiện $T(t_0) = T_0$ gọi là *điều kiện đầu*. Bài toán tìm nghiệm của phương trình $T' = r(T - T_a)$ thỏa mãn điều kiện đầu gọi là *bài toán giá trị ban đầu* (initial value problem).

Một cách tổng quát, IVP của phương trình vi phân cấp 1 được cho bởi

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \tag{5.2.4}$$

Với phương trình vi phân cấp 2, IVP có dạng

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \tag{5.2.5}$$

ở đó x_0, x_1 là các giá trị cho trước và IVP cho phương trình vi phân cấp n có dạng

$$\begin{aligned} &x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)), \\ &x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Ví dụ 5.10. Hàm

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t - s) ds$$

là nghiệm duy nhất của IVP

$$x'' + \omega^2 x = f(t),\ t \geq 0, \quad x(0) = x'(0) = 0, \tag{5.2.7}$$

ở đó $\omega > 0$ là hằng số (tần số dao động).

5.3. Giải một số lớp phương trình vi phân cấp 1

5.3.1. Phương trình tách biến

Xét lớp phương trình dạng *tách biến*

$$x' = g(t)h(x). \tag{5.3.1}$$

Trong nhiều mô hình ứng dụng, hàm mô tả trạng thái của mô hình viết được dưới dạng tách biến. Ví dụ, mô hình phân rã nguyên tử $N' = -\lambda N$, luật Newton $T' = r(T - T_a)$ hay phương trình động lực học dân số dạng logistic $P' = (a - bP)P$.

Giải phương trình tách biến

1. Xác định điểm cân bằng
2. Tách biến phương trình về dạng
$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt$$
3. Tích phân hai vế của phương trình
$$H(x) = \int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt + c = G(t) + C.$$
4. Giải nghiệm tổng quát $x = H^{-1}(G(t) + C)$.

Trường hợp đặc biệt

- $x' = f(t)$: $x = \displaystyle\int f(t)dt + c$
- $x' = f(x)$: $x = F^{-1}(t + C)$, where $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$
- $x' = f(at + bx)$, ở đó $a, b \in \mathbb{R}$ là các hằng số, $b \neq 0$. Đặt $z = at + bx$. Khi đó, phương trình trở thành $z' = a + bf(z)$. Nghiệm tổng quát $x = \dfrac{G^{-1}(t + C) - at}{b}$, ở đó $G(u) = \displaystyle\int \frac{1}{a + bf(u)}du$.

Ví dụ 5.11. Phương trình $x' = 2t(1+x)^2$ có nghiệm tổng quát $x = -1 + \dfrac{1}{t^2 - C}$ và nghiệm cân bằng $x = -1$. Phương trình $x' = \dfrac{2t - 4}{3x^2 - 4}$ có nghiệm tổng quát dạng ẩn $x^3 - 4x = t^2 - 4t + C$.

5.3.2. Phương trình thuần nhất

Một hàm $f(t, x)$ xác định trên miền D được gọi là *thuần nhất* bậc k nếu với mọi số thực λ và $(t, x) \in D$, ta có
$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k f(t, x).$$

Ví dụ $at^2 + btx + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ là hằng số); $x^3 \exp(t^2/t^2 - x^2)$; $(t^4 + 2x^4)^{1/3}$, $f(at + bx/ct + dx)$ là các hàm thuần nhất bậc tương ứng là $2, 3, 4/3$ và 0. Nếu $f(t, x)$ là hàm thuần nhất bậc k thì với mọi $t \neq 0$

$$f(t, x) = f\left(t, t\frac{x}{t}\right) = t^k f(1, z),$$

ở đó $tz = x$.

Định nghĩa 5.3.1. Phương trình vi phân cấp 1

$$M(t, x) + N(t, x)x' = 0 \tag{5.3.2}$$

được gọi là *phương trình vi phân thuần nhất* nếu $M(t, x)$ và $N(t, x)$ là các hàm thuần nhất cùng bậc (kí hiệu là k).

Nếu (5.3.2) là phương trình thuần nhất thì ta có thể viết dưới dạng

$$t^k M\left(1, \frac{x}{t}\right) + t^k N\left(1, \frac{x}{t}\right) x' = 0. \tag{5.3.3}$$

Sử dụng phép biến đổi $x = tz$ ta được

$$[M(1, z) + zN(1, z)] + tN(1, z)z' = 0 \tag{5.3.4}$$

là một phương trình tách biến. Nghiệm tổng quát dạng ẩn được cho bởi

$$t \exp\left(\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\right) = c,$$

ở đó $\varphi(z) = \displaystyle\int \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)} dz$.

Ví dụ 5.12. Phương trình $x' = \dfrac{t^2 + tx + x^2}{t^2}$ $(t \neq 0)$ là phương trình thuần nhất. Nghiệm tổng quát $\ln|t| - \arctan(x/t) = C$.

Áp dụng, giải phương trình dạng

$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \tag{5.3.5}$$

ở đó $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ là các hằng số. Nếu $c_1 = c_2 = 0$ thì (5.3.5) là phương trình thuần nhất. Nếu $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ thì ta chọn các số α, β sao cho

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

Nếu $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hệ (5.3.6) có nghiệm duy nhất. Khi đó, phương trình (5.3.5) chuyển thành một phương trình thuần nhất bởi phép thế

$$t = u + \alpha, \quad x = v + \beta.$$

Nếu $D = 0$ thì (5.3.5) là trường hợp riêng của (5.3.1).

Ví dụ 5.13. Xét phương trình

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{t+x-2}{t+2}\right)^2.$$

Phép thế $t = u - 2,\ x = v + 3$ đưa phương trình trên về phương trình thuần nhất

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}\frac{(u+v)^2}{u^2}.$$

Nghiệm tổng quát

$$2\arctan\frac{x-3}{t+2} = \ln|t+2| + C.$$

5.3.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

Xét phương trình vi phân

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t), \tag{5.3.7}$$

ở đó $p, q : (a, b) \to \mathbb{R}$ là các hàm số liên tục.

Kí hiệu $\mathbb{X} = C^1(I, \mathbb{R})$ và $\mathbb{Y} = C(I, \mathbb{R})$. Với $p, q \in \mathbb{Y}$ cho trước, ánh xạ $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, $Lx = x' + p(t)x$ có tính chất $L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2$ và $L(\lambda x) = \lambda Lx$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{X}$ (ánh xạ tuyến tính). Phương trình (5.3.7) trở thành *phương trình tuyến tính* trong $\mathbb{Y}$, $Lx = q$. Đặc biệt, khi $q = 0$, phương trình $Lx = x' + p(t)x = 0$ là *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất* cấp 1.

Xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$x' + p(t)x = 0. \tag{5.3.8}$$

Chú ý rằng $\dfrac{d}{dt}\exp(\int p(t)dt) = p(t)\exp(\int p(t)dt)$. Do đó, bằng cách nhân hai vế với $\exp(\int p(t)dt)$, phương trình (5.3.8) tương đương với

$$\frac{d}{dt}\left(xe^{\int p(t)dt}\right) = 0.$$

Từ đó ta nhận được nghiệm tổng quát của (5.3.8)

$$x(t) = Ce^{-\int p(t)dt}.$$

Hơn nữa, nghiệm duy nhất của bài toán IVP

$$x' + p(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.3.9}$$

được cho bởi

$$x(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(s)ds\right) x_0.$$

Bây giờ ta xét phương trình tuyến tính không thuần nhất (5.3.7). Giả sử $x_*(t)$ là một nghiệm (nào đó) của (5.3.7). Khi đó, $Lx_* = q$. Đặt $z = x - x_*$ với mỗi $x \in \mathbb{X}$, ta được $Lz = L(x - x_*) = Lx - q$. Do vậy, $x \in \mathbb{X}$ là nghiệm của (5.3.7) khi và chỉ khi z là nghiệm của (5.3.8). Như vậy, nếu x_* là một nghiệm (cố định) của (5.3.7) thì nghiệm tổng quát của nó là

$$x = x_* + C\exp\left(-\int p(t)dt\right). \tag{5.3.10}$$

Vấn đề còn lại là làm thế nào để tìm một nghiệm x_* của (5.3.7). Theo *phương pháp biến thiên hằng số* Largrange, ta tìm nghiệm x_* dạng

$$x_* = C(t)\exp\left(-\int p(t)dt\right). \tag{5.3.11}$$

Từ công thức (5.3.11) ta nhận được

$$Lx_* = C'(t)\exp\left(-\int p(t)dt\right).$$

Mà x_* là nghiệm của phương trình (5.3.7) nếu và chỉ nếu $Lx_* = q$. Điều này tương đương với $C'(t) = q(t)\exp(\int p(t)dt)$. Từ đó ta được

$$C(t) = \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt$$

và nghiệm tổng quát của (5.3.7) là

$$x = e^{-\int p(t)dt}\left(C + \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt\right). \tag{5.3.12}$$

Tương tự đối với phương trình thuần nhất, với mỗi (t_0, x_0) cho trước, nghiệm duy nhất của bài toán

$$x' + p(t)x = q(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.3.13}$$

được cho bởi

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(s)ds} \left(x_0 + \int_{t_0}^t q(s) e^{\int_{t_0}^s p(u)du} ds \right).$$

Ví dụ 5.14. Nghiệm tổng quát của phương trình $t^2x' + tx = 1$ trên khoảng $(0, \infty)$ là $x = \dfrac{1}{t}(C + \ln t)$.

Ví dụ 5.15. (On-off voltage source) Ta xét lại mô hình RC. Giả sử $V(t) = K$ (constant) với $t \in [0, T)$, $T > 0$ cố định, nhưng tại $t = T$ nguồn bị tắt ($V(t) = 0$ for $t \geq T$). Khi đó,

$$v_C' = \frac{V(t) - v_C}{RC} = \begin{cases} \frac{K - v_C}{RC}, \ t \in [0, T), \\ \frac{-v_C}{RC}, \ t \geq T. \end{cases} \tag{5.3.14}$$

Nghiệm liên tục của (5.3.14) được ho bởi

$$v_C(t) = \begin{cases} v_C(0)e^{-t/RC} + K(1 - e^{-t/RC}), \ t \in [0, T), \\ v_C(T) \exp\left(\frac{t-T}{RC}\right), \ t \geq T. \end{cases}$$

Áp dụng: Giải phương trình *Bernoulli*

$$x' + p(t)x = q(t)x^\alpha, \tag{5.3.15}$$

ở đó $\alpha \in \mathbb{R}$ là một hằng số.

Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (5.3.15) có dạng tuyến tính. Giả sử $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$. Chia (5.3.15) cho x^α và dùng phép thế $z = x^{1-\alpha}$ ta được

$$z' + (1 - \alpha)p(t)z = (1 - \alpha)q(t) \tag{5.3.16}$$

là phương trình tuyến tính. Nghiệm tổng quát của (5.3.16) là

$$x^{1-\alpha} = e^{(\alpha-1)\int p(t)dt} \left(C + (1 - \alpha) \int q(t) e^{(1-\alpha)\int p(t)dt} dt \right).$$

Ví dụ 5.16. Phương trình $x' + x = 5x^2 \sin 2t$ có nghiệm $x = 0$ và nghiệm tổng quát

$$x = \frac{1}{\sin 2t + 2\cos 2t + Ce^t}.$$

5.3.4. Bài tập phương trình vi phân cấp 1

1. Một nhà xưởng được làm mát bởi hệ thống thông gió với hệ số làm mát k. Nhiệt độ khí quyển biến động kiểu hình sin với chu kì 24h, thấp nhất 15°C lúc 2:00 a.m. và cao nhất 35°C lúc 2:00 p.m. Kí hiệu t là thời gian (giờ) với $t = 0$ lúc 8:00 a.m.

   a) Thiết lập phương trình vi phân diễn tả nhiệt độ $T(t)$ trong xưởng.

   b) Giả sử $k = 0.2$. Nhiệt độ cao nhất và thấp nhất đạt đến của nhà xưởng là bao nhiêu?

   Đáp số. (a) $T' + kT = k\left(25 + 10\sin\dfrac{\pi t}{12}\right)$. (b) $T_{\max} = 31,1°\text{C}$, $T_{\min} = 18,9°\text{C}$

2. Một vật khối lượng m rơi từ độ cao $H = 3200$ (km) với vận tốc ban đầu $v_0 = 0$. Trọng lực biến đổi theo quy tắc

$$F = \frac{mgR^2}{(R + H - x)^2}$$

   với $R = 6400$ (km) là bán kính trái đất, $g = 9.8$ là trọng lực trên mặt đất và x là độ lệch từ điểm rơi. Bỏ qua sức cản của môi trường. Xác định thời gian để vật chạm đất và vận tốc khi chạm đất.

   Chú ý: gia tốc $a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$. Đáp số: $t = 1141$ (s), $v = 6,47$ (km/s).

3. Sự sinh trưởng của quần thể một loài cá có yếu tố đánh bắt được mô tả bởi phương trình vi phân

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - H \tag{5.3.17}$$

   với k, H là các hằng số dương.

   a) Dân số loài cá biến đổi thế nào khi H tăng (hãy vẽ 4 quỹ đạo hàm $F_H(p) = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) - H$ ứng với 4 giá trị khác nhau của H và nhận xét).

   b) Điểm cân bằng của mô hình (5.3.17) là nghiệm của phương trình đại số $F_H(p) = 0$. Tìm các điểm cân bằng của (5.3.17)?

   c) Tốc độ đánh bắt tới hạn: Hãy chỉ ra rằng nếu $H > kN/4$ thì quần thể loài cá đó sẽ dần đến tuyệt chủng. Khi số lượng cá thể gần đến không do $H/kN/4$, tại sao ta cần ngăn chặn đánh bắt một cách triệt để giúp hồi sinh loài (tức là loài phục hồi sinh trưởng khi H dưới $kN/4$ một chút).

4. Giải các phương trình vi phân cấp 1 sau

(a) $xx' = e^{t+x^2}$

(b) $x' = (4t + x - 1)^2$

(c) $2t^2xx' + x^2 = 2$

(d) $t \sin x + (t^2 + 1)x' \cos x = 0.$

Gợi ý: Đổi biến (a), (c) $z = x^2$; (b) $z = 4t + x - 1$ và (d) $z = \sin x$

5. Giải các phương trình *thuần nhất* sau

(a) $(x^2 - 2tx) + t^2x' = 0$

(b) $(t^2 - x^2) + 2txx' = 0$

(c) $(t^2 + x^2)x' = 2tx$

(d) $x' = e^{-\frac{t}{x}} + \frac{x}{t}$

(e) $tx' - x = t \sin \dfrac{x - t}{t}$

6. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi về dạng tuyến tính

(a) $(1 + t^2)x' - 2tx = 0$

(b) $(2e^x - t)x' = 1$

(c) $(t + x^2)x' = x$

(d) $t(e^x - x') = 2$

(e) $2(1 + x^3) + 3tx^2x' = 0$

(f) $x + t(1 + tx^4)x' = 0$

Gợi ý: (b), (c) đưa về $\frac{dt}{dx}$, (d) $z = e^{-x}$, (e) $z = x^3$, (f) Bernoulli.

7. Giải các phương trình *Bernoulli* sau

(a) $x' - 2tx = 3t^3x^2$

(b) $x' + 2tx = 2t^3x^3$

(c) $(2t^2x \ln x - t)x' = x$

(d) $x' + 2x = x^2e^t$

(e) $tx' + x = x^2 \ln t, x(1) = 1$

(f) $x' = x^4 \cos t + x \tan t$

5.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

Phương trình dao động điều hòa

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

hay dao động cơ học chứa số hạng "tắt dần" và ngoại lực

$$x'' + 2\zeta_0\omega x' + \omega^2 x = \frac{1}{m} f_{ext}(t)$$

là những ví dụ về phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Một cách tổng quát, ta xét phương trình vi phân cấp n sau đây

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + p_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \ldots + p_0(t)x = q(t), \qquad (5.4.1)$$

ở đó p_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ và q là các hàm số liên tục trên khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Kí hiệu $\mathbb{X} = C^n(a, b)$, $\mathbb{Y} = C(a, b)$ và xét ánh xạ $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ cho bởi

$$Lx = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)x. \tag{5.4.2}$$

Dễ dàng kiểm tra được tính chất

$$L\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j L x_j$$

đúng với mọi $\lambda_j \in \mathbb{R}$ và $x_j \in \mathbb{X}$. Ánh xạ như trên được gọi là một toán tử vi phân tuyến tính (cấp n) $\mathbb{X}$ vào $\mathbb{Y}$. Phương trình (5.4.1) được viết dạng $Lx = q$. Vì vậy, (5.4.1) là *phương trình vi phân tuyến tính cấp n*. Nếu $q \not\equiv 0$ thì $Lx = q$ là phương trình vi phân tuyến tính *không thuần nhất*. Phương trình

$$Lx = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + p_0(t)x = 0 \tag{5.4.3}$$

gọi là *phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp n*. Phương trình dao động điều hòa là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2 trong khi phương trình $x'' + \omega^2 x = e^{-\alpha t}\sin^2(x)$ là phương trình vi phân phi tuyến (không tuyến tính).

5.4.1. Cấu trúc nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Xét phương trình (5.4.3) và gọi $\mathcal{S}$ là tập hợp các nghiệm của nó. Rõ ràng một hàm $x \in \mathbb{X}$ là nghiệm của (5.4.3) khi và chỉ khi $Lx = 0$. Do tính chất (tuyến tính) của toán tử L, nếu $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là m nghiệm bất kì của (5.4.3) thì với mọi $\lambda_j \in \mathbb{R}$,

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$$

cũng là nghiệm của (5.4.3). Nói cách khác, tập $\mathcal{S}$ có cấu trúc *không gian tuyến tính* và là không gian con của không gian $\mathbb{X}$. Để mô tả chi tiết hơn cấu trúc của không gian nghiệm của (5.4.3), ta cần một số khái niệm về tính *độc lập tuyến tính* và *phụ thuộc tuyến tính* của họ hàm số.

Định nghĩa 5.4.1. Họ hàm số $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ được gọi là

(i) *độc lập tuyến tính* trên khoảng I nếu $\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k = 0$ trên I, tức là $\sum_{k=1}^{m} c_k\phi_k(t) = 0$, $\forall t \in I$, kéo theo $c_k = 0$ với mọi k;

(ii) *phụ thuộc tuyến tính* trên I nếu tồn tại các hằng số c_k sao cho $\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \neq 0$ và $\sum_{k=1}^{m} c_k \phi_k = 0$.

Ví dụ 5.17. (i) Hệ đa thức $1, t, t^2, \ldots, t^m$ độc lập tuyến tính trên mọi khoảng.

(ii) Cho $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ là các số thực phân biệt. Hệ hàm $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_m t}$ độc lập tuyến tính trên mọi khoảng.

(iii) Tổng quát của (ii), hệ tích hợp hàm mũ-đa thức

$$\begin{aligned}
&e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{n_1} e^{\lambda_1 t},\\
&e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{n_2} e^{\lambda_2 t},\\
&\ldots\\
&e^{\lambda_m t}, te^{\lambda_m t}, \ldots, t^{n_m} e^{\lambda_m t},
\end{aligned}$$

độc lập tuyến tính trên mọi khoảng I.

Kết quả sau đây cho mô tả cấu trúc tập nghiệm của (5.4.3).

Định lí 5.4.1. (i) *Tồn tại n nghiệm của* (5.4.3) *độc lập tuyến tính trên I.*

(ii) *Giả sử $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ là n nghiệm độc lập tuyến tính của* (5.4.3). *Khi đó, nghiệm bất kì $x \in \mathcal{S}$ của* (5.4.3) *được biểu diễn dạng*

$$x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n, \tag{5.4.4}$$

ở đó $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là các hằng số tùy ý.

Định lí 5.4.1 chỉ ra sự tồn tại của ít nhất một tập n nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (5.4.3) và bất kì nghiệm nào của (5.4.3) cũng biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của n nghiệm độc lập tuyến tính đó. Nói cách khác, tập nghiệm $\mathcal{S}$ của (5.4.3) là một không gian tuyến tính n chiều. Mỗi hệ n nghiệm độc lập tuyến tính đó là một cơ sở của không gian nghiệm và được gọi là một *hệ nghiệm cơ bản*. Biểu thức (5.4.4) cho công thức biểu diễn nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.4.3). Như vậy, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cấp n ta chỉ cần tìm một hệ nghiệm cơ bản.

Ví dụ 5.18. Phương trình dao động điều hòa $x'' + \omega^2 x = 0$ $(\omega > 0)$ có hệ nghiệm cơ bản $\cos(\omega t)$ và $\sin(\omega t)$(chi tiết xem mục sau). Nghiệm tổng quát của phương trình là $x = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$.

5.4.2. Giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

Mục này ta trình bày phương pháp (thực hành) tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = 0, \tag{5.4.5}$$

ở đó $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ là các hằng số cho trước.

Như đã trình bày ở mục trước, để giải phương trình (5.4.5) (tìm nghiệm tổng quát), ta cần tìm một hệ nghiệm cơ bản $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Khi đó, nghiệm tổng quát của (5.4.5) được cho bởi

$$x = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n,$$

với $c_k \in \mathbb{R}$ là các hằng số tùy ý.

Chú ý rằng, với bất kì số phức $\lambda \in \mathbb{C}$, ta có $\left(e^{\lambda t}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda t}$. Do đó,

$$L(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)}_{F(\lambda)}.$$

Vì $|e^{\lambda t}| = e^{\mathrm{Re}\lambda t} > 0$ nên $e^{\lambda t} \neq 0$ với mọi t và $L(e^{\lambda t}) = 0$ khi và chỉ khi

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_1\lambda + \ldots + a_0 = 0. \tag{5.4.6}$$

Phương trình (5.4.6) là một phương trình đại số bậc n. Mỗi nghiệm $\lambda \in \mathbb{R}$ của (5.4.6) cho một nghiệm tương ứng $x = e^{\lambda t}$ của (5.4.5). Nếu $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ là một nghiệm phức của (5.4.6) thì từ

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + \mathrm{i}\, e^{\alpha t}\sin\beta t$$

ta được hai nghiệm độc lập tuyến tính $x_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$ và $x_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$. Chú ý thêm rằng $\lambda \in \mathbb{C}$ là nghiệm của (5.4.6) khi và chỉ khi số phức liên hợp $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ là nghiệm của (5.4.6) do $\overline{F(\lambda)} = F(\overline{\lambda})$. Như vậy, hai nghiệm độc lập tuyến tính x_1, x_2 là hai nghiệm ứng với cặp nghiệm phức liên hợp $\lambda, \overline{\lambda}$ của (5.4.6). Trường hợp đặc biệt, nếu (5.4.6) có n nghiệm thực phân biệt λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thì $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ là n nghiệm độc lập tuyến tính của (5.4.5). Do đó, nghiệm tổng quát của (5.4.5) là $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}$. Việc giải phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.4.5) được xác định thông qua tập nghiệm của phương trình đại số (5.4.6). Phương trình (5.4.6) gọi là *phương trình đặc trưng* của (5.4.5) và đa thức $F(\lambda)$ nói trên là đa thức đặc trưng của (5.4.5).

Bổ đề sau đây được sử dụng để xây dựng hệ nghiệm cơ bản của (5.4.5) từ nghiệm bội của (5.4.6).

Bổ đề 5.4.2. *Với bất kì số nguyên dương m và số phức $\lambda \in \mathbb{C}$, ta có*

$$L(t^m e^{\lambda t}) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k F^{(k)}(\lambda) t^{m-k} e^{\lambda t}.$$

Từ Bổ đề trên ta có

(i) Nếu $\lambda \in \mathbb{R}$ là nghiệm bội k của (5.4.6) thì $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ là k nghiệm độc lập tuyến tính của (5.4.5).

(ii) Nếu $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ là nghiệm bội k của (5.4.6) thì $\overline{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ cũng là nghiệm bội k của (5.4.6) và

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t \\ &e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{aligned}$$

là $2k$ nghiệm độc lập tuyến tính của (5.4.5).

Thuật toán hình thức sau cho lời giải của (5.4.5).

- Giải phương trình đặc trưng (5.4.6).
- Nếu (5.4.6) có n nghiệm thực phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ thì nghiệm tổng quát của (5.4.5) được cho bởi

$$x = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t}.$$

- Giả sử (5.4.6) các nghiệm thực $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ với bội $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Khi đó, nghiệm tổng quát của (5.4.5) được cho bởi

$$x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=0}^{k_j - 1} c_{jl} t^l e^{\lambda_j t}.$$

- Trường hợp (5.4.6) có nghiệm phức. Giả sử $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ là một nghiệm phức bội k của (5.4.6). Khi đó, $\bar{\lambda} = \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ cũng là nghiệm phức bội k của (5.4.6). Cặp nghiệm $\lambda, \bar{\lambda}$ cho $2k$ nghiệm độc lập tuyến tính trong hệ nghiệm cơ bản là $e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$ và $e^{\alpha t}\sin\beta t$, $te^{\alpha t}\sin\beta t$, $\ldots$, $t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Ví dụ 5.19. Giải phương trình

$$x''' - x'' - x' + x = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ có các nghiệm $\lambda = 1$ (bội 2) và $\lambda = -1$. Do đó, hệ nghiệm cơ bản là $\{e^t, te^t, e^{-1}\}$ và nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}$$

với c_1, c_2, c_3 là các hằng số tùy ý.

Ví dụ 5.20. Giải phương trình

$$x^{(4)} - 2x''' + 2x'' - 2x' + x = 0.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có các nghiệm $\lambda = 1$ và $\lambda = \pm\,\mathrm{i}$. Hệ nghiệm cơ bản là $\{e^t, te^t, \cos t, \sin t\}$ và nghiệm tổng quát được cho bởi

$$x = c_1e^t + c_2te^t + c_3\cos t + c_4\sin t.$$

5.4.3. Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

Trong mục này ta xét phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất dạng tổng quát (5.4.1). Phương trình (5.4.1) có thể viết dưới dạng *toán tử* $Lx = q$ với toán tử L xác định bởi (5.4.2). Giả sử x_* là một nghiệm của (5.4.1), tức là $Lx_* = q$. Với $x \in \mathbb{X} = C^n(a,b)$, đặt $z = x - x_*$, ta có $Lz = Lx - q$. Do đó, x là một nghiệm của (5.4.1) khi và chỉ khi $z = x - x_*$ là một nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (5.4.3). Từ đó ta có kết quả sau.

Mệnh đề 5.4.3. *Giả sử x_* là một nghiệm của* (5.4.1) *và ϕ_1, $\phi_2, \dots, \phi_n$ là hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất* (5.4.3)*. Khi đó, nghiệm tổng quát của* (5.4.1) *được cho bởi*

$$x = x_* + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots + c_n\phi_n,$$

ở đó c_k là các hằng số tùy ý.

Theo Mệnh đề 5.4.3, để tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (5.4.1) ta cần tìm một nghiệm riêng x_* và hệ nghiệm cơ bản của phương trình thuần nhất (5.4.3). Nghiệm x_* như thế có thể tìm dựa trên *phương pháp biến thiên hằng số* hoặc trong một số trường hợp đặc biệt, khi hàm $q(t)$ có cấu trúc nhất định, ta có thể sử dụng phương pháp *hệ số bất định*. Do giới hạn của chương trình, dưới đây ta minh họa phương pháp thực hành tìm x_* bằng phương pháp hệ số bất định ứng với phương trình (5.4.1) có hệ số hằng số.

5.4.3.1. Hàm $q(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$, ở đó $\alpha \in \mathbb{R}$ và $P_m(t)$ là đa thức bậc m

Nghiệm x_* của (5.4.1) được tìm với cấu trúc sau đây

- Nếu $\lambda = \alpha$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.4.6) thì ta tìm nghiệm x_* dạng
$$x_* = Q_m(t)e^{\alpha t}$$
ở đó $Q_m(t)$ là một đa thức bậc m nào đó. Thay vào (5.4.1) để tìm $Q_m(t)$.

- Nếu $\lambda = \alpha$ là nghiệm bội k của (5.4.6) thì tìm x_* dạng
$$x_* = t^k Q_m(t)e^{\alpha t}.$$

Ví dụ 5.21. Giải phương trình
$$x''' - 2x'' = 24t.$$
Nghiệm đặc trưng $\lambda = 0$ (bội 2) và $\lambda = 2$. Vế phải $q(t) = 24t$ là đa thức bậc 1 ($\alpha = 0$). Vì $\lambda = 0$ là nghiệm đặc trưng bội 2 nên nghiệm x_* có dạng
$$x_* = t^2(at + b) = at^3 + bt^2.$$
Từ đó có
$$x_*''' - 2x_*'' = -12at + 6a - 4b = 24t.$$
Đồng nhất hệ số ta được $a = -2, b = -3$ và nghiệm tổng quát của phương trình là
$$x = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} - 2t^3 - 3t^2.$$

5.4.3.2. Hàm $q(t) = e^{\alpha t}\left(P_{m_1}(t)\cos\beta t + P_{m_2}(t)\sin\beta t\right)$

- Nếu $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (5.4.6) thì ta tìm x_* dạng
$$x_* = e^{\alpha t}\left(Q_m(t)\cos\beta t + R_m(t)\sin\beta t\right),$$
ở đó $Q_m(t)$, $R_m(t)$ là các đa thức bậc $m = \max\{m_1, m_2\}$. Lưu ý, công thức tìm nghiệm x_* vẫn phải đủ thành phần $\cos\beta t$ và $\sin\beta t$ ngay cả khi vế phải $q(t)$ khuyết một trong hai hàm đó.

- Nếu $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$ là nghiệm bội k của (5.4.6) thì x_* có dạng

$$x_* = t^k e^{\alpha t} \left(Q_m(t)\cos\beta t + R_m(t)\sin\beta t\right).$$

Ví dụ 5.22. Giải phương trình

$$x'' + x' - 2x = 10e^t \cos t.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$, $\lambda = -2$. Do $\lambda = 1 + \mathrm{i}$ không là nghiệm đặc trưng nên ta tìm nghiệm $x_* = e^t\big(a\cos t + b\sin t\big)$. Đồng nhất hệ số ta được $a = -1, b - 3$ và nghiệm tổng quát của phương trình là

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + e^t(3\sin t - \cos t).$$

5.4.3.3. Trường hợp $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_k(t)$, ở đó $q_j(t)$ có một trong các dạng trên: Nguyên lí "chồng chất" nghiệm

Giả sử x_j là nghiệm của phương trình $Lx = q_j$ và $x_* = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Khi đó, ta có

$$Lx_* = Lx_1 + Lx_2 + \ldots + Lx_k = q_1 + q_2 + \ldots + q_k = q.$$

Do đó, x_* là một nghiệm của phương trình (5.4.1). Nói cách khác, khi vế phải là tổng các hàm thuộc một trong các dạng sử dụng hệ số bất định như trên thì ta tìm nghiệm x_* dạng tổng các hàm x_j mà ở đó x_j là nghiệm của phương trình $Lx = q_j$.

Ví dụ 5.23. Giải phương trình

$$x'' + 3x' - 4x = 5e^{-4t} - 50te^t.$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ có nghiệm $\lambda = 1$ và $\lambda = -4$. Vế phải $q(t) = 5e^{-4t} - 50te^t$ không có dạng ở 5.4.3.1 và 5.4.3.2 nhưng là tổng hai hàm dạng 5.4.3.1. Cụ thể, $q_1(t) = 5e^{-4t}$ ứng với $\alpha = -4$ và đa thức bậc 0, trong khi $q_2(t) = -50te^t$ ứng với $\alpha = 1$ và đa thức bậc 1.

- Tìm nghiệm x_1 của phương trình $x'' + 3x' - 4x = 5e^{-4t}$ dạng $x_1 = ate^{-4t}$. Thay vào phương trình ta được $a = -1$.

- Tìm nghiệm x_2 của phương trình $x'' + 3x' - 4x = -50te^t$ dạng $t(bt + c)e^t$. Thay vào phương trình ta được

$$x_2'' + 3x_2' - 4x_2 = (10bt + 2b + 5c)e^t = -50te^t.$$

Đồng nhất hệ số ta được $b = -5, c = 2$. Vậy $x_* = -te^{-4t} + (2t - 5t^2)e^t$ là một nghiệm của phương trình đã cho và nghiệm tổng quát là

$$x = (-5t^2 + 2t + c_1)e^t + (-t + c_2)e^{-4t}$$

với c_1, c_2 là các hằng số tùy ý.

5.4.4. Bài tập phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

1. Giải các phương trình sau

1. $x''' + 3x'' + 9x' - 13x = 0$
2. $x''' - 5x'' + 8x' - 4x = 0$
3. $x^{(4)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 0$
4. $x''' - 13x'' + 12x = 0$
5. $x''' - 2x'' - x' + 2x = 0$
6. $x^{(4)} - 5x'' + 4x = 0$
7. $x''' - 2x'' + 9x' - 18x = 0$
8. $x^{(4)} + 10x'' + 9x = 0$
9. $x''' - 7y'' + 18x' - 12x = 0$
10. $x^{(4)} + 2x'' - 8x' + 5x = 0$

2. Giải các phương trình không thuần nhất sau

1. $x'' - 2x' + x = 4e^t$
2. $x''' - 3x'' + 2x' = t^2 - 1$
3. $x'' - 3x' = e^{3t} - 18t$
4. $x'' - 3x' + 2x = 3e^{2t} + 2t^2$
5. $x'' - x = 2e^t - t^2$
6. $x'' + x' - 2x = 3te^t$
7. $x'' - 5x' + 4x = 4t^2e^{2t}$
8. $x'' + 3x' - 4x = e^{-4t} + te^t$
9. $x'' - 9x = e^{3t}\cos t$
10. $x'' + x = \sin t \cos 3t.$

3. Tìm nghiệm của các bài toán sau

1. $x'' - 2x' = 2e^t,\ x(-1) = -1, x'(-1) = 0$
2. $x''' - 3x' + 2x = 9e^{2t},\ x(0) = 0, x'(0) = -3, x''(0) = 3$
3. $x'' + 4x' + 4x = 3e^{-2t},\ x(0) = x'(0) = 0$
4. $x^{(4)} + x'' = 0,\ x(0) = -2, x'(0) = 1, x''(0) = x'''(0) = 0.$

4. Giải *phương trình Euler* bằng cách biến đổi về phương trình tuyến tính với hệ số hằng số (với $t > 0$)

1. $t^2x'' - 2tx' + 2x = 0$
2. $t^2x'' - tx' + x = 8t^3$
3. $t^2x'' - tx' + x = 6t\ln t$

Hướng dẫn: Đặt $t = e^u$. Ta có $x' = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{du}e^{-u}$, $x'' = \dfrac{d}{dt}x' = \left(\dfrac{d^2x}{du^2} - \dfrac{dx}{du}\right)e^{-2u}$. Phương trình thứ nhất trở thành

$$\frac{d^2x}{du^2} - 3\frac{dx}{du} + 2x = 0.$$

5.5. Hệ phương trình vi phân tuyến tính

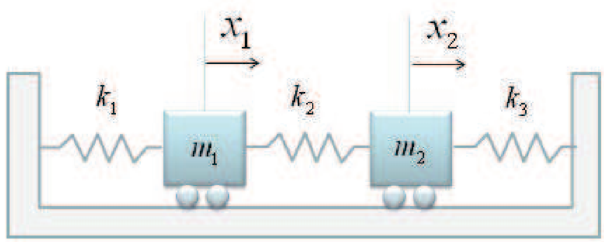
Mục này giới thiệu sơ lược về hệ phương trình vi phân tuyến tính và phương pháp thực hành giải hệ phương trình vi phân tuyến tính với ma trận hằng số trong không gian hai chiều. Trước hết, ta trở lại ví dụ về mô hình dao động cơ học (mass-spring-damper) ở Ví dụ 5.8. Phương trình chuyển động của vật m được cho bởi

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{1}{m}f_{ext}. \tag{5.5.1}$$

Ký hiệu $x_1 = x$, $x_2 = x'$, phương trình (5.5.1) được viết dưới dạng một *hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất* sau đây

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{a}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f_{ext}(t). \tag{5.5.2}$$

Bây giờ ta xét một ví dụ khác về mô hình dao động mô tả như trên Hình 5.5.



Hình 5.5: Coupled Vibrations

Gọi c là hệ số ma sát mặt sàn. Áp dụng định luật Newton

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -cx_1' - (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2x_2'' &= -cx_2' - (k_2 + k_3)x_2 + k_2x_1. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Ký hiệu $X_1 = x_1$, $X_2 = x_1'$, $X_3 = x_2$, $X_4 = x_2'$, ta có *hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất* sau

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & -\dfrac{c}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2 + k_3}{m_2} & -\dfrac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}. \tag{5.5.4}$$

Tổng quát, một hệ phương trình vi phân tuyến tính là hệ có dạng

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}}_{x'} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}}_{A(t)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}}_{f(t)}, \tag{5.5.5}$$

ở đó $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ là các hàm ẩn, $a_{ij}(t), f_i(t)$ là các hàm liên tục trên khoảng $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. Hệ (5.5.5) được viết gọn dưới dạng vectơ-ma trận sau đây

$$x' = A(t)x + f(t). \tag{5.5.6}$$

Định lí 5.5.1. *Giả sử $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ là ma trận có các phần tử liên tục trên I. Khi đó, với bất kì $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, bài toán giá trị ban đầu*

$$x' = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{5.5.7}$$

có nghiệm duy nhất xác định trên toàn khoảng I.

Ký hiệu $\mathbb{X} = C^1(I, \mathbb{R}^n)$ là tập các hàm khả vi liên tục I với giá trị $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{Y} = C(I, \mathbb{R}^n)$. Ánh xạ $L : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ xác định bởi

$$Lx(t) = x'(t) - A(t)x(t)$$

có tính chất với mọi $x, y \in \mathbb{X}$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y)(t) &= (\alpha x + \beta y)'(t) - A(t)(\alpha x + \beta y)(t) \\ &= \alpha x'(t) + \beta y'(t) - \alpha A(t)x(t) - \beta A(t)y(t) \\ &= \alpha[x'(t) - A(t)x(t)] + \beta[y'(t) - A(t)y(t)] \\ &= \alpha Lx(t) + \beta Ly(t) = (\alpha Lx + \beta Ly)(t) \end{aligned}$$

với mọi $t \in I$. Do đó

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

Ánh xạ L như thế là một *toán tử tuyến tính* và hệ (5.5.6) được viết ở dạng $Lx = f$, nên ta nói (5.5.6) là phương trình vi phân tuyến tính. Khi $f \not\equiv 0$, (5.5.6) là hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất. $f = 0$, (5.5.6) là hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất.

5.5.1. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với ma trận hằng số

Trong mục này ta xét phương pháp giải hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất dạng

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{5.5.8}$$

ở đó $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ là vectơ hàm ẩn và $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ là các hằng số.

Phương pháp: Biến đổi về phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Ta minh phương pháp giải qua ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5.24. Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính sau

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x.$$

Ta viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng tường minh sau đây

$$x_1' = x_1 - x_2 \tag{5.5.9a}$$
$$x_2' = x_1 + 3x_2. \tag{5.5.9b}$$

Từ phương trình (5.5.9a), đạo hàm hai vế ta được

$$x_1'' = x_1' - x_2' \overset{(5.5.9b)}{=} x_1' - x_1 - 3x_2.$$

Mặt khác, (5.5.9a) $\Leftrightarrow x_2 = x_1 - x_1'$. Thay vào phương trình trên ta được

$$x_1'' - 4x_1' + 4x_1 = 0. \tag{5.5.9c}$$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ của (5.5.9c) có nghiệm $\lambda = 2$ bội 2 nên nghiệm tổng quát $x_1 = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}$. Khi đó,

$$x_2 = x_1 - x_1' = -c_1e^{2t} - c_2(1+t)e^{2t}.$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ -1-t \end{bmatrix} e^{2t}.$$

5.5.2. Hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất với ma trận hằng số

Trong mục này ta xét phương pháp giải hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất dạng

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \tag{5.5.10}$$

ở đó $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ là vectơ hàm ẩn, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ là các hằng số và $f_1(t)$, $f_2(t)$ là các hàm số cho trước.

Phương pháp: Biến đổi về phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Ta minh phương pháp giải qua ví dụ dưới đây.

Ví dụ 5.25. Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu sau

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -t^2 + t - 2 \\ 2t^2 - 4t - 7 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ta viết lại hệ phương trình đã cô dưới dạng

$$x_1' = x_1 + x_2 - t^2 + t - 2 \tag{5.5.11a}$$

$$x_2' = -2x_1 + 4x_2 + 2t^2 - 4t - 7. \tag{5.5.11b}$$

Đạo hàm hai vế (5.5.11a) ta được

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1' + x_2' - 2t + 1 \\ &\overset{(5.5.11b)}{=} x_1' - 2x_1 + 4x_2 + 2t^2 - 6t - 6. \end{aligned}$$

Mặt khác, (5.5.11a) $\Leftrightarrow x_2 = x_1' - x_1 + t^2 - t + 2$. Thay vào phương trình trên và rút gọn ta được

$$x_1'' - 5x_1' + 6x_1 = 6t^2 - 10t + 2. \tag{5.5.11c}$$

Phương trình thuần nhất tương ứng của (5.5.11c) có nghiệm đặc trưng $\lambda = 2$ và $\lambda = 3$. Ta tìm một nghiệm riêng của (5.5.11c) dạng

$$x_{1*} = at^2 + bt + c.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} x_{1*}'' - 5x_{1*}' + 6x_{1*} &= 6at^2 + (6b - 10a)t + 6c + 2a \\ &= 6t^2 - 10t + 2. \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được $a = 1$, $b = c = 0$. Nghiệm tổng quát của (5.5.11c) là $x_1 = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + t^2$ và ta có

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1' - x_1 + t^2 - t + 2 \\ &= c_1e^{2t} + 2c_2e^{3t} + t + 2. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm tổng quát của hệ đã cho là

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} t^2 \\ t+2 \end{bmatrix}.$$

Để tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu, thay $t = 0$ ta được

$$x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình tuyến tính ẩn c_1, c_2 ta được $c_1 = c_2 = 1$. Nghiệm của bài toán cần tìm là

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} t^2 \\ t+2 \end{bmatrix}.$$

5.5.3. Bài tập hệ phương trình vi phân tuyến tính

1. *Giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất sau*

1. $x' = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$
2. $x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} x$
3. $x' = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} x$
4. $x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x$

2. *Giải các hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất sau*

1. $x' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{bmatrix}$
2. $x' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 4e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $x' = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 5e^{-t} \end{bmatrix}$

4. $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 16 + e^{t} \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + 2 \begin{bmatrix} e^{t} \\ 2e^{t} \end{bmatrix}$

6. $x' = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 40e^{t} \\ 9e^{-t} \end{bmatrix}$

3. Tìm nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

1. $x' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} te^{t} \\ 0 \end{bmatrix}, \ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

2. $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t + \cos t \end{bmatrix}, \ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

Tài liệu tham khảo

[1] William A. Adkins, Mark G. Davidson, *Ordinary Differential Equations*, Springer, NY, 2012.

[2] Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Springer, NY, 2008.

[3] Paul Blanchard, Robert L. Devaney, Glen R. Hall, *Differential Equations*, 3rd, Thomson Brooks/Cole, California, 2006.

[4] Walter G. Kelley, Allan C. Peterson, *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*, 2nd, Springer, NY, 2010.

[5] James C. Robinson, *An introduction to Ordinary Differential Equations*, CUP, Cambrige, 2004.