TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

KHOA TOÁN-TIN

TÀI LIỆU MÔN HỌC

CALCULUS

(Nhóm ngành KHTN-CN K69)

HÀ NỘI 2019

Mục lục

Chương 1

Giới hạn hàm và hàm liên tục

Calculus là học phần cơ bản của lĩnh vực giải tích toán học, bao gồm hai nhánh chính là *phép tính vi phân* và *phép tính tích phân*. Phép tính vi phân liên quan đến tốc độ biến đổi tức thời (instantaneous rates of change) của các đại lượng (vật lí, hóa học, sinh học v.v), độ dốc (tiếp tuyến) của đường cong v.v, trong khi phép tính tích phân được sử dụng khi tính tổng (dạng tích lũy) các đại lượng, diện tích giới hạn bởi các đường cong. Hai phép tính này liên quan chặt chẽ với nhau bởi *định lí cơ bản* của giải tích (the fundamental theorem of calculus) và sử dụng các khái niệm cơ bản về sự *hội tụ* của dãy và chuỗi vô hạn.

Calculus được phát triển từ nửa cuối thế kỉ 17th bởi Isaac Newton và Gottfried Wilhelm Leibniz. Ngày nay, calculus được sử dụng trong hầu khắp các lĩnh vực của khoa học tự nhiên, kĩ thuật, kinh tế và môi trường và khoa học xã hội.

1.1 Dãy số và giới hạn dãy số

Khái niệm về dãy số không phải là mới nhưng bây giờ chúng ta sẽ làm quen với một khía cạnh mới của dãy số dùng để mô tả dáng điệu của những phần tử của dãy tại "điểm xa vô tận".

1.1.1 Định nghĩa dãy số: Dãy số là một qui tắc ứng một số tự nhiên với một số thực. Nếu viết chính xác thì một dãy số là một tậ hợp có dạng $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, hay còn được viết $\{a_n\}_{n \geq 1}$.

Khái niệm quan trọng nhất gắn liền với một dãy số là *giới hạn của dãy số.*

1.1.2. Định nghĩa giới hạn Dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ được gọi là hội tụ tới giới hạn l nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N sao cho $|a_n - l| < \varepsilon$ với mọi $n > N$.

Điều này có nghĩa là với bất kỳ một đoạn thẳng cho trước chứa a thì *đến một lúc nào đó, toàn bộ* dãy số trên sẽ rơi vào đoạn thẳng đó.

Trong trường hợp này ta viết $a_n \to a$ hay đầy đủ hơn là $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Đương nhiên cũng có những dãy số **không hội tụ** chẳng hạn $a_n = 1$ khi n lẻ và $a_n = -1$ khi n chẵn. Hoặc đơn giản hơn ta thấy dãy các số tự nhiên $a_n = n$ cũng không hôi tụ.

1.1.3. Hai ví dụ quan trọng về dãy số hội tụ:

(a) $a_n = \frac{1}{n}$. Khi đó $\{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$ hội tụ về 0 khi $n \to \infty$.

(b) $a_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Khi đó $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ hội tụ về 1 $n \to \infty$.

Một vấn đề nảy sinh là khi nào một dãy là hội tụ? Nếu dãy hội tụ thì tính giới hạn như thế nào? Ta có câu trả lời cho câu hỏ dễ hơn đó là: Khi nào một dãy số *không* hội tụ.

Điều kiện cần cho dãy hội tụ. (i) Dãy số $\{a_n\}$ không hội tụ nếu nó không bị chặn, tức là với mọi số tự nhiên N ta luôn tìm được phần tử a_m sao cho $|a_m| > N$.

(ii). Dãy số $\{a_n\}$ không hội tụ nếu dãy này chứa hai dãy con $\{a_{n_k}\}$ và $\{a_{m_k}\}$ hội tụ đến hai giới hạn khác nhau.

Ta thường áp dụng mệnh đề trên để chỉ ra một dãy là không hội tụ.

Ngoài dãy số hội tụ, ta cũng quan tâm tới khái niệm sau:

Giới hạn bằng vô cùng. Ta nói dãy số a_n có giới hạn bằng vô cùng (viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$) nếu với mọi số nguyên N có một chỉ số M để $a_n > N$ với mọi $n \geqslant M$.

Tương tự như thế, ta nói dãy số a_n có giới hạn bằng âm vô cùng (viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) nếu với mọi số tự nhiên N có một chỉ số M để $a_n < -N$ với mọi $n \geq M$.

Để tính giới hạn của dãy số, chúng ta sẽ sử dụng các công thức cơ bản sau đây:

1.1.4. Phép tính trên dãy hội tụ:

Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Khi đó ta có:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = a/b$, nếu $b \neq 0$.

Để hiểu hơn khái niệm giới hạn chúng ta có thể chứng minh một trong 4 khẳng định nói trên. Chẳng hạn với (a), hãy lấy $\varepsilon > 0$ là một số tùy ý (luôn hình dung là rất bé). Khi đó bằng cách áp dụng đinh nghĩa của giới hạn cho $\varepsilon/2$, ta tìm được N và M sao cho

$$|a_n - a| < \varepsilon/2 \ \forall n > N, |b_n - b| < \varepsilon/2 \ \forall n > M.$$

Vậy nếu $n > \max(N, M)$ thì

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| \leqslant \varepsilon.$$

Bằng cách quan niệm $\max(N, M)$ chính là N trong định nghĩa 1.2 ta có điều phải chứng minh (a).

Một phương pháp khác cũng hay được sử dụng để tính giới hạn dãy số là phương pháp *kẹp giữa*

1.1.5. Phương pháp kẹp giữa. Cho a_n, b_n và c_n là 3 dãy số thỏa mãn $a_n \leq b_n \leq c_n$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Chứng minh kết quả trên chỉ dựa vào định nghĩa của giới hạn và bất đẳng thức

$$|b_n - l| \leq |a_n - l| + |c_n - l| \ \forall n \geqslant 1.$$

Ví dụ áp dụng: $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = 0$.

1.1.6. Hội tụ của dãy đơn điệu

Một dãy số nói chung rất hiếm khi là đơn điệu *tăng* hay là đơn điệu *giảm*. Tuy nhiên nếu dãy số đó là đơn điệu thì ta có thể nói rằng dãy số đa "hầu như" hội tụ. Điều này được thể hiện qua kết quả sâu sắc sau đây mà chứng minh của nó ta sẽ bỏ qua vì động chạm đến bản chất của số thực.

1.1.7. Định lý hội tụ của dãy đơn điệu.

(i) Cho $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu tăng (tức là $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$) và bị chặn trên (tức là có một số tự nhiên N thỏa mãn $a_n \leq N$ với mọi n). Khi đó tồn tại giới hạn $l := \lim_{n\to\infty} a_n$. Ta viết $a_n \uparrow l$.

(ii) Cho $\{a_n\}$ là một dãy đơn điệu giảm (tức là $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$) và bị chặn dưới (tức là có một số tự nhiên N thỏa mãn $a_n \geq -N$ với mọi n). Khi đó tồn tại giới hạn $l := \lim_{n\to\infty} a_n$. Ta viết $a_n \downarrow l$.

Sử dụng định lý trên ta có thể chứng minh được kết quả kinh điển sau đây mà nhờ nó ta định nghĩa được cơ số logarit tự nhiên.

Định nghĩa số e. Xét hai dãy số

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Khi đó a_n là dãy đơn điệu tăng và b_n đơn điểu giảm. Hơn nữa a_n và b_n bị chặn trên (tương ứng chặn dưới) bởi 3. Theo định lý trên, các dãy số này sẽ hội tụ về cùng một giới hạn và ta ký hiệu giới hạn này là e.

Người ta đã chứng minh được $e = 2,718281828\cdots$ là một số vô tỷ. Cùng với số π đây là một trong hai con số quan trọng của toán học. Tuy nhiên khác với số π được định nghĩa một cách hình học là nửa chu vi của đường tròn bán kính 1 thì ta chỉ có thể định nghĩa được e nhờ *giới hạn dãy số.* Điều này phần nào nói lên tầm quan trọng của khái niệm giới hạn.

1.2 Giới hạn hàm số

Đối tượng quan trọng của chương này là khái niệm "hàm số". Để hiểu về hàm số thì ta có thể lấy hai ví dụ cơ bản:

1. Diện tích của hình tròn bán kính r là πr^2. Như thế diện tích là hàm số của *biến số* bán kính theo nghĩa cứ cho trước bán kính ta tính được diện tích.

2. Dân số của một thành phố cũng là một hàm số theo biến số thời gian.

Ta có định nghĩa chính xác sau đây.

1.2.1. Định nghĩa hàm số. Cho A là một tập hợp các số thực (ví dụ cơ bản là những số thực trong một khoảng mở $(0,1)$ hay một đoạn đóng $[0,1]$). Một hàm số f xác định trên A là một qui tắc cho ứng $x \in A$ với một số $f(x)$. Ta gọi f là hàm số của biến số x.

Khái niệm quan trọng gắn liền hàm số là *giới hạn* của hàm số.

1.2.2. Định nghĩa giới hạn hàm số Cho f là hàm số xác định trên một tập A.

(i) Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$|x-a| < \delta, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta sẽ viết $f(x) \to l$ khi $x \to a$ hoặc là $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

(ii) Ta nói hàm số f có *giới hạn trái* bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$a - \delta < x < a, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta viết $f(x) \to l$ khi $x \to a - 0$ hoặc là $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = l$.

(iii) Ta nói hàm số f có *giới hạn phải* bằng l khi biến số x tiến tới giá trị a nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho

$$a < x < a + \delta, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, ta viết $f(x) \to l$ khi $x \to a + 0$ hoặc là $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l$.

(iv) Ta nói hàm f có giới hạn tại ∞ bằng l khi biến số x tiến tới ∞ nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho

$$x > M, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(v) Ta nói hàm f có giới hạn tại ∞ bằng l khi biến số x tiến tới $-\infty$ nếu điều sau đây là đúng: Với mọi $\varepsilon > 0$ ta tìm được số $M > 0$ sao cho

$$x < -M, x \in A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ta có chú ý đơn giản nhưng quan trọng sau đây

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = l.$$

Để liên hệ với sự hội tụ của dãy số, chúng ta đưa vào định nghĩa tương đương sau đây về giới hạn hàm:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ khi và chỉ khi với mọi dãy số $x_n \to a, x_n \in A$ chúng ta có $f(x_n) \to l$.

Ta có ví dụ đơn giản sau về giới hạn hàm.

Ví dụ.

(i) $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$. Điều này có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa giới hạn qua ngôn ngữ của dãy ở trên.

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} 1/x = 0$.

Các ví dụ này có thể được kiểm chứng bằng cách sử dụng định nghĩa giới hạn qua ngôn ngữ của dãy ở trên.

1.2.3 Các phép toán về giới hạn hàm Cho các hàm f, g xác định trên tập hợp A (ta luôn nghĩ về A như một khoảng mở hay một đoạn thẳng đóng). Giả sử f, g đều có giới hạn khi $x \to a \in A$. Khi đó ta có:

(i) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x \to a} (\frac{f}{g})(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, nếu vế phải có nghĩa.

1.3 Hàm số liên tục

Một loại hàm quan trọng mà chúng ta hay gặp trong thực tế chính là các *hàm liên tục*. Ta cần các hàm như vậy để mô tả chuyển động của một vật thể (xe máy, người đi bộ,...) hay một đường cong ta vẽ trên giấy... Định nghĩa chính xác được được đưa ra như sau:

Định nghĩa hàm liên tục. Ta nói hàm số f xác định trên tập A là *liên tục* tại $a \in A$ nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Hay nói cách khác, giới hạn trái và giới hạn phải của f tại $x = a$ đều bằng nhau và bằng $f(a)$.

Khi f liên tục tại mọi điểm của A thì ta nói f liên tục trên A.

Ví dụ $f(x) = 0$ nếu $x < 0$ và $f(x) = x$ nếu $x \geq 0$ là hàm liên tục trên toàn bộ tập xác định là $\mathbb{R}$.

Điều gì khiến hàm liên tục trở nên quan trọng? Thứ nhất là hàm liên tục có tính phổ quát (nó bao hàm tất cả các loại hàm mà ta đã học từ trước đến giờ) ngoài ra còn có những hàm được xác định như trong ví dụ trên. Thứ hai là hàm liên tục có nhiều tính chất quan trọng đã được các nhà toán học khám phá từ thế kỷ 19. Chúng ta sẽ điểm qua ba định lý quan trọng nhất của loại hàm này. Do cách chứng minh phải sử dụng một só kiến thức khá sâu về sự tồn tại của dãy con hội tụ đối với một dãy bị chặn cũng như sử dụng tính đày của $\mathbb{R}$ nên chúng ta sẽ không đi sâu vào chi tiết.

Định lý Weierstrass về sự tồn tại cực trị của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$.

Định lý Cantor về tính liên tục đều của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$. Khi đó hàm f liên tục đều theo nghĩa sau đây:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Định lý Bolzano về giá trị trung gian của hàm liên tục. Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$.
i) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = 0$.
ii) Với mọi λ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = \lambda$.

Ta có một số chú ý liên quan tới 3 định lý kinh điển nói trên:

1. Định lý Weierstrass và Định lý Cantor trên chỉ đúng cho các hàm liên tục trên những đoạn thẳng đóng. Ta có thể lấy ví dụ hàm $f(x) = 1/x$ không đạt

cực đại, cực tiểu trên $(0,1)$ và cũng không liên tục đều trên $(0,1)$.

2. Sử dụng định lý Bolzano ta có thể chứng minh được mọi đa thức bậc 3 (hay tổng quát hơn là bậc lẻ) đều có ít nhất 1 nghiệm thực.

3. Định lý Cantor sẽ được sử dụng sau này để chứng minh một kết quả về tính *khả tích* của hàm liên tục trên đoạn thẳng đóng.

4. Định lý Weierstrass cho chúng ta cơ sở để giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một đa thức trên một đoạn thẳng đóng.

Bài tập Chương 1

1. Tính giới hạn của các dãy sau

$$a)\ x_n = \frac{n^2+n-3}{2n^2+2n+2} \qquad b)\ x_n = \frac{n+\sqrt{n}}{2n+3\sqrt[3]{n}}$$

$$c)\ x_n = \sqrt{n^2+3n}-n \qquad d)\ x_n = n-\sqrt[3]{n^3-3n^2}$$

$$e)\ x_n = \frac{2.3^n-4^n}{2^{2n+1}-2^n} \qquad f)\ x_n = \frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n}.$$

2. Tính các giới hạn sau (bằng cách dùng nguyên lý kẹp)

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n+2\cos n}{n} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+\cos n^2}{n+\sin n}$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big).$$

3. * a) Dùng đẳng thức $(x+1)^n = x^n + C_n^1x^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}x+C_n^n$ để chứng tỏ rằng

$$(x+1)^n > \frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad \forall n\geqslant 2, x>0.$$

b) Dùng (a) và nguyên lý kẹp để chứng minh rằng, với $a>1$, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0.$$

4. Chứng minh các dãy sau đơn điệu tăng và bị chặn (từ đó suy ra dãy hội tụ)

a) $x_n = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2};$

b) $x_n = \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}++\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$

5. * Cho dãy $\{x_n\}$ cho bởi công thức quy nạp

$$x_1=\sqrt{2}, \quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, \quad n\geqslant 1.$$

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi 2;

b) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ đơn điệu tăng;

c) Tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

6. Chứng minh các dãy số sau không hội tụ và chỉ ra hai dãy con hội tụ của chúng

$$a)\ x_n = (-1)^n\left(3 + \frac{3}{n}\right) \qquad b)\ x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

7. * a) Chứng minh nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ thì $\lim_{n\to\infty}(x_{n+2} - x_n) = 0$;
   b) Chứng minh dãy $\{\sin n\}$ không hội tụ.

8. Tính các giới hạn sau

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-4} \qquad b)\ \lim_{x\to 3}\frac{(x^2-x-6)^2}{x^2-2x-3}$$

$$c)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) \qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2+x}{x^3-3x+2}.$$

9. Tính các giới hạn sau

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-1}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x}}{x}$$

$$d)\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \qquad e)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}} \qquad f)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+2x}-x-1}.$$

10. Tìm các giới hạn sau

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}{\sqrt{4x^2+1}} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) \qquad c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^8+2x^2+x+2)} \qquad e)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}.$$

11. Tìm các giới hạn sau bằng cách sử dụng nguyên lý kẹp

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^3\cos\frac{1}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x+2\sin 2x}{2x+\cos x+2}$$

12. Trong Vật lý, dao động tắt dần được mô tả bởi hàm số

$$f(t) = e^{-\alpha t}(a\cos\omega t + b\sin\omega t),$$

với $\alpha > 0$ và $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

13. Đặt $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ với $x \neq 0$. Chứng minh không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

14. Trong Thuyết tương đối, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức
$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
ở đó m_0 là khối lượng của vật đó khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi $v \to c^-$?

15. Trong Thuyết tương đối, độ dài của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức
$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$
ở đó L_0 là độ dài của vật đó khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Tìm $\lim\limits_{v\to c^-} L$.

16. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên miền xác định $\mathbb{R}$ của chúng

$$a)\, f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \qquad b)\, g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$c)\, h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

17. Xét tính liên tục của hàm Heaviside (xác định trên $\mathbb{R}$)
$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x \geqslant 0. \end{cases}$$

18. Cho hàm số $f(x) = [x]$, $x \in \mathbb{R}$, ở đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (gọi là phần nguyên của x). Ví dụ $[2] = 2$, $[3.6] = 3$, $[-1.1] = -2$.
a) Vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ khi $x \in [-3, 3]$;
b) Chứng minh $f(x)$ liên tục tại mọi $x \notin \mathbb{Z}$, nhưng không liên tục tại mọi $x \in \mathbb{Z}$.

19. Tìm số thực a sao cho các hàm sau liên tục trên $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x > 1 \\ x+a & \text{khi } x \leqslant 1 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x+a}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 3 & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

20. Lực hấp dẫn của trái đất đối với một vật có khối lượng $1kg$ cách tâm trái đất một khoảng bằng r được cho bởi công thức

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geqslant R, \end{cases}$$

ở đó M là khối lượng của trái đất, R là bán kính của trái đất, G là hằng số hấp dẫn.
a) Hàm $F(r)$ có liên tục theo r trên $[0, +\infty)$ không?
b) Tìm $\lim\limits_{r\to\infty} F(r)$.

21. Xét tính liên tục đều của các hàm sau trên tập đã chỉ ra
a) Hàm $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{x}$ trên $(0, 1)$;
b) Hàm $f(x) = x^2$ trên $\mathbb{R}$.

22. Chứng minh rằng
a) Phương trình $x^2 - 1 = 2\sin x$ có nghiệm trên $(0, \dfrac{\pi}{6})$;
b) Đa thức $p(x) = x^4 - 2x - 2$ có nghiệm trên $(1, 2)$;
c) Mọi đa thức bậc lẻ đều có nghiệm thực.

23. Cho hàm liên tục $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Chứng minh tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho $f(c) = c$.

24. Cho hàm liên tục $f : [0, 1] \to [0, 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh tồn tại $c \in (0, 1)$ thỏa mãn $f(c) = 1 - c$.

25. Cho $f(x)$ là làm tuần hoàn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh $f(x)$ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

26. * Tìm một toàn ánh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho $f(1) = 2$, $f(2) = -1$, nhưng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(1, 2)$.

27. * Cho các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Chứng minh rằng
a) Hàm $h(x) := |f(x)|$ cũng liên tục trên $[a, b]$;
b) Hai hàm $M(x) := \max\big\{f(x), g(x)\big\}$ và $m(x) := \min\big\{f(x), g(x)\big\}$ cũng liên tục trên $[a, b]$.

28. * Cho hàm $f : (a, b) \to (0, +\infty)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = 0.$$

a) Chứng minh hàm $g(x)$ cho bởi

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \neq a \text{ và } x \neq b \\ 0 & \text{khi } x = a \text{ hoặc } x = b. \end{cases}$$

liên tục trên $[a, b]$;
b) Hàm f đạt giá trị lớn nhất trên (a, b).

29. * Cho hàm $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ là hàm liên tục thỏa mãn

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0.$$

Chứng minh f đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

Lời giải một số bài toán

7. a) Hiển nhiên;
b) Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x = \ell$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(n+1) - \sin(n-1)) = 0$. Kéo theo $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(n+1) - \cos(n-1)) = 0$. Nên $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. Điều này không xảy ra vì $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$.

25. Giả sử hàm f tuần hoàn chu ỳ là $T > 0$. Ta thấy f đạt được max và min trên $[0, T]$. Do tính tuần hoàn, đó cũng chính là max và min toàn cục của $f(x)$.

26. Ta có thể chọn hàm $f(x)$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \leqslant 1 \\ 5 - 3x & \text{khi } 1 < x < 2,\ x \neq \frac{3}{2} \\ 10 & \text{khi } x = \frac{3}{2} \\ x - 3 & \text{khi } x \leqslant 2. \end{cases}$$

27. (b) Dùng (a) và đẳng thức sau

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2}, \quad \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}.$$

28. a) Dễ dành chứng minh hàm liên tục tại hai đầu mút nên $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$;
b) Hàm $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại 1 điểm $x_0 \in [a, b]$. Nhưng giả thiết cho ta $x_0 \neq a, b$. Nên $x_0 \in (a, b)$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại x_0.

29. Ta thấy $f(0) > 0$. Từ giả thiết suy ra tồn tại $R > 0$ sao cho $0 < f(x) < f(0)$ với mọi $|x| > R$. Hàm f đạt giá trị lớn nhất trên $[-R, R]$ tại x_0. Suy ra

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad \forall x \in [-R, R]$$

và

$$f(x_0) \geqslant f(0) > f(x), \quad \forall |x| > R.$$

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ tại x_0.